Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Markus Schmid
HU Berlin

Lehrvortrag
Magdeburg, 13.11.25

Grundbegriffe zu Kontextfreien Grammatiken

Bekannt aus vorherigen Vorlesungen:

- Kontextfreie Sprachen und Grammatiken.
- Ableitungen in kontextfreien Grammatiken.
- Ableitungsbäume.
- Chomsky Normalform.
  (Jede Ableitungsregel hat die Form
  $A \to BC$ oder $A \to a$)

Kurze Wiederholung: PL für reguläre Sprachen.

Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit

$$N = \{S, A, B, C\},\ \Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,\\ A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},\\ B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},\\ C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

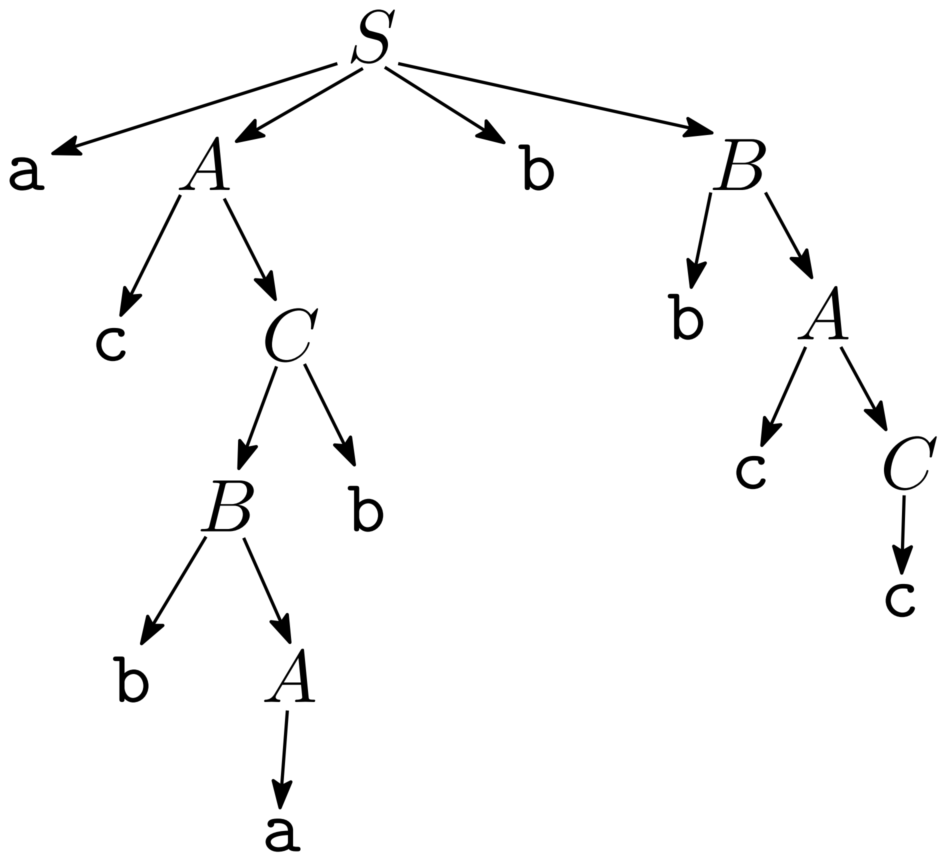
Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit
$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \rightarrow \mathtt{c}C, A \rightarrow \mathtt{a},$

$B \rightarrow \mathtt{b}A, B \rightarrow \mathtt{b},$

$C \rightarrow B\mathtt{a}, C \rightarrow \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a\ c\ b\ a\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$

Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

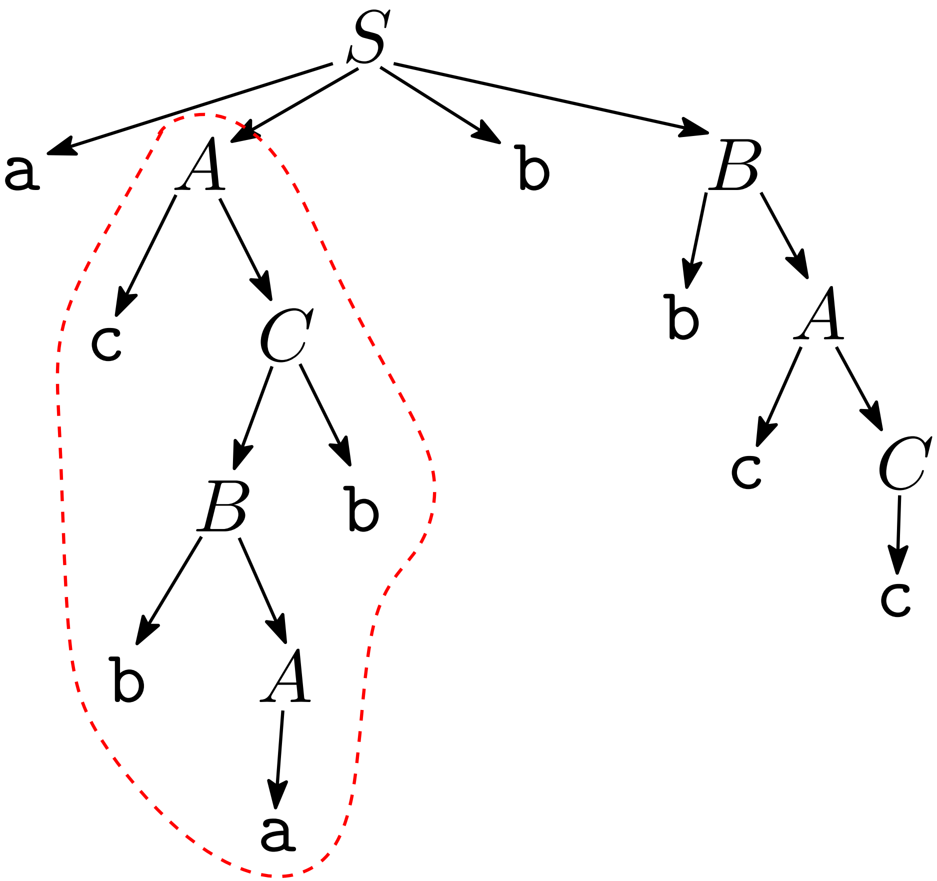
Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit

$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a}\,\boxed{\mathtt{c\,b\,a\,b}}\,\mathtt{b\,b\,c\,c} \in L(G)$

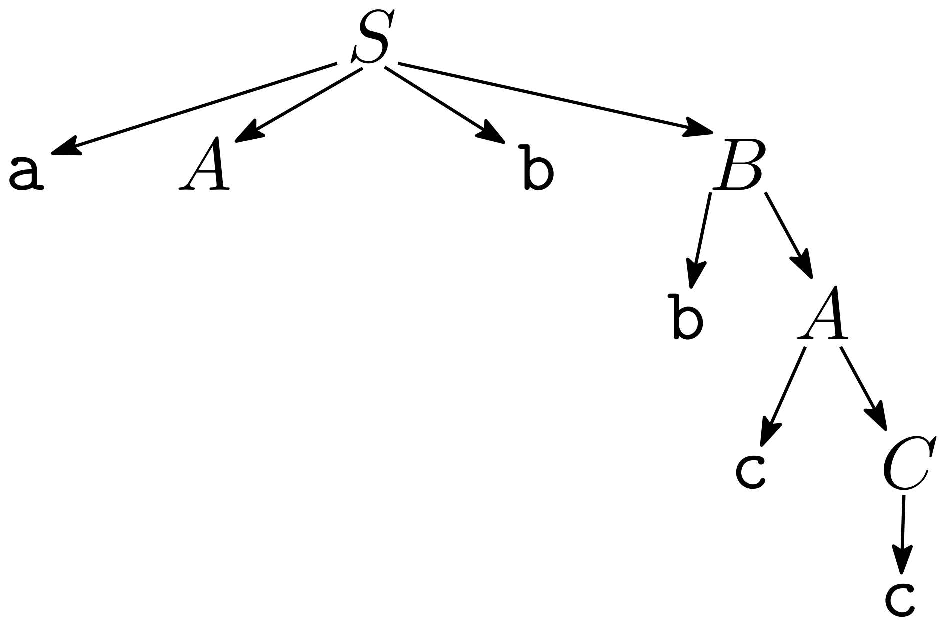
Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit
$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a}\ \boxed{}\ \mathtt{b}\ \mathtt{b}\ \mathtt{c}\ \mathtt{c} \in L(G)$

Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

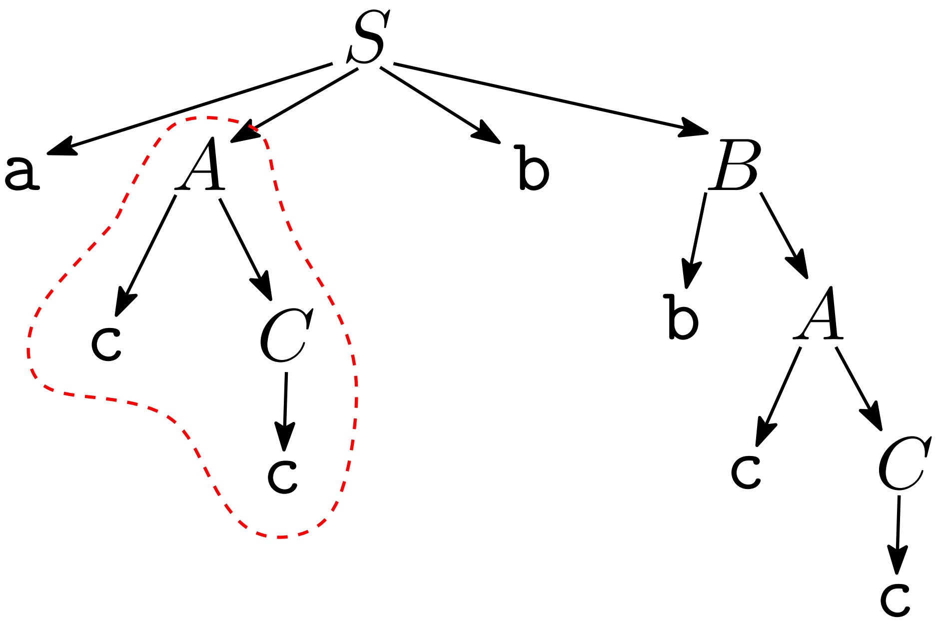
Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit

$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



a c c b b c c $\in L(G)$

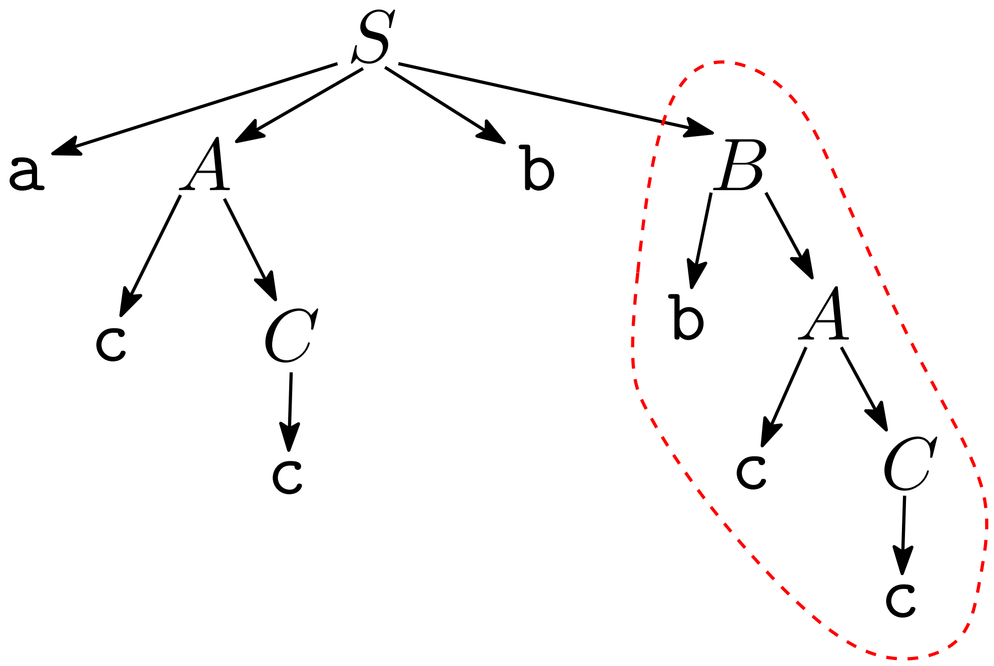
Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit
$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a\ c\ c\ b}\ \boxed{\mathtt{b\ c\ c}} \in L(G)$

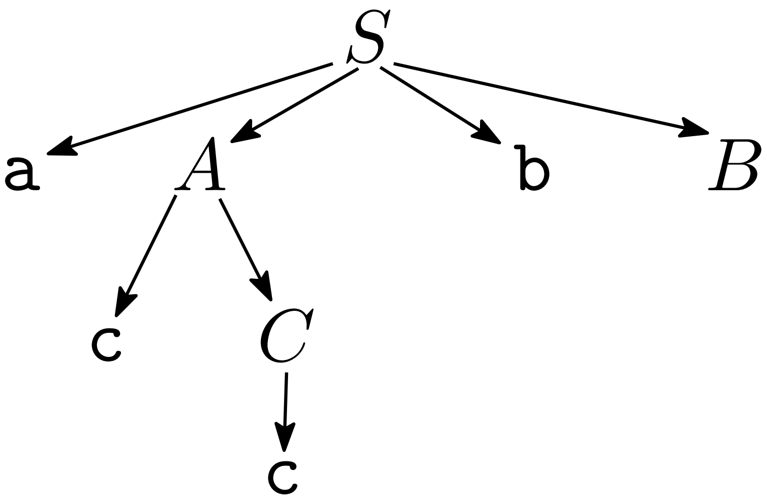
Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit
$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a}\ \mathtt{c}\ \mathtt{c}\ \mathtt{b}$ ⬚ $\in L(G)$

Ersetzungen von Teilbäumen im Ableitungsbaum

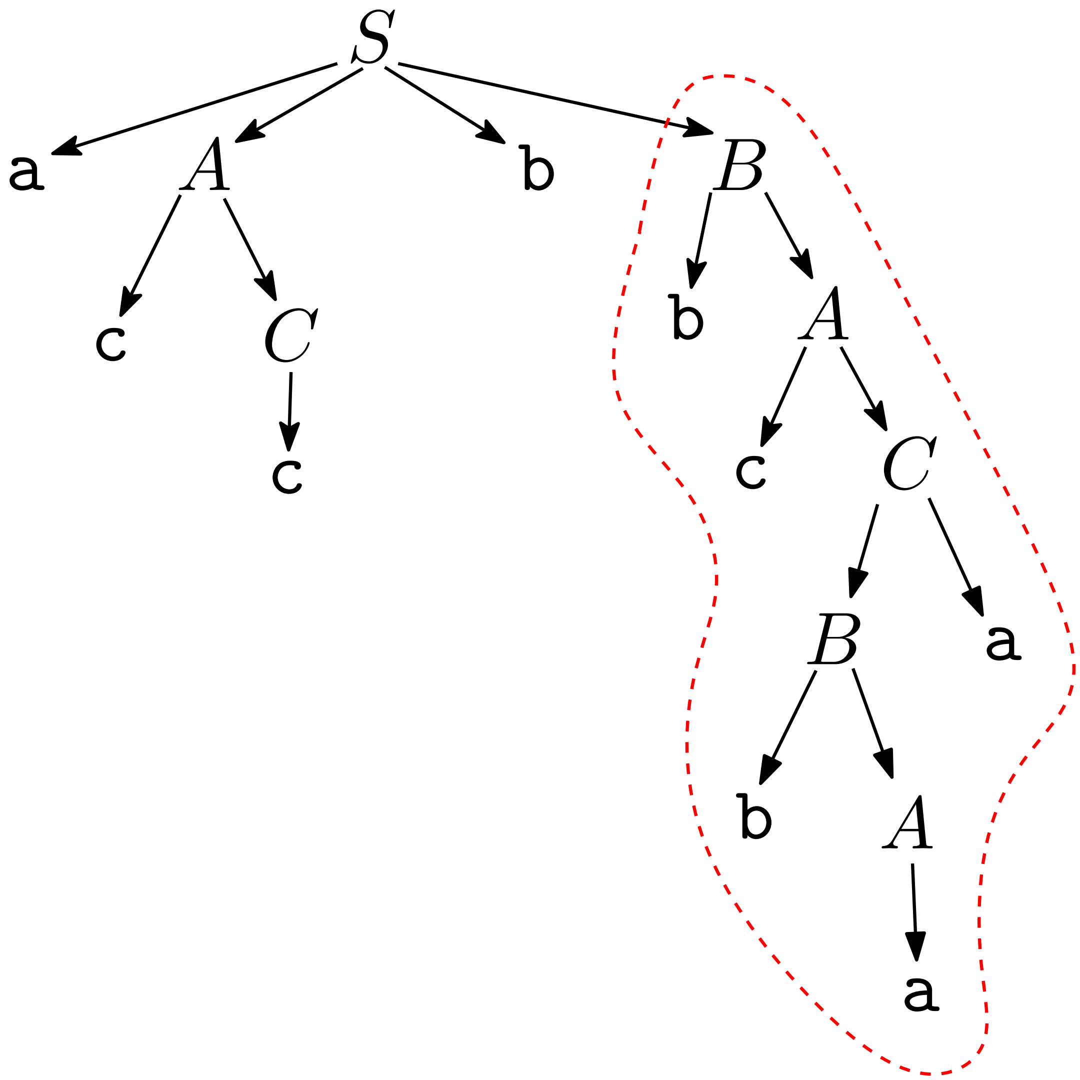
Sie $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine CFG mit

$N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$

$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$

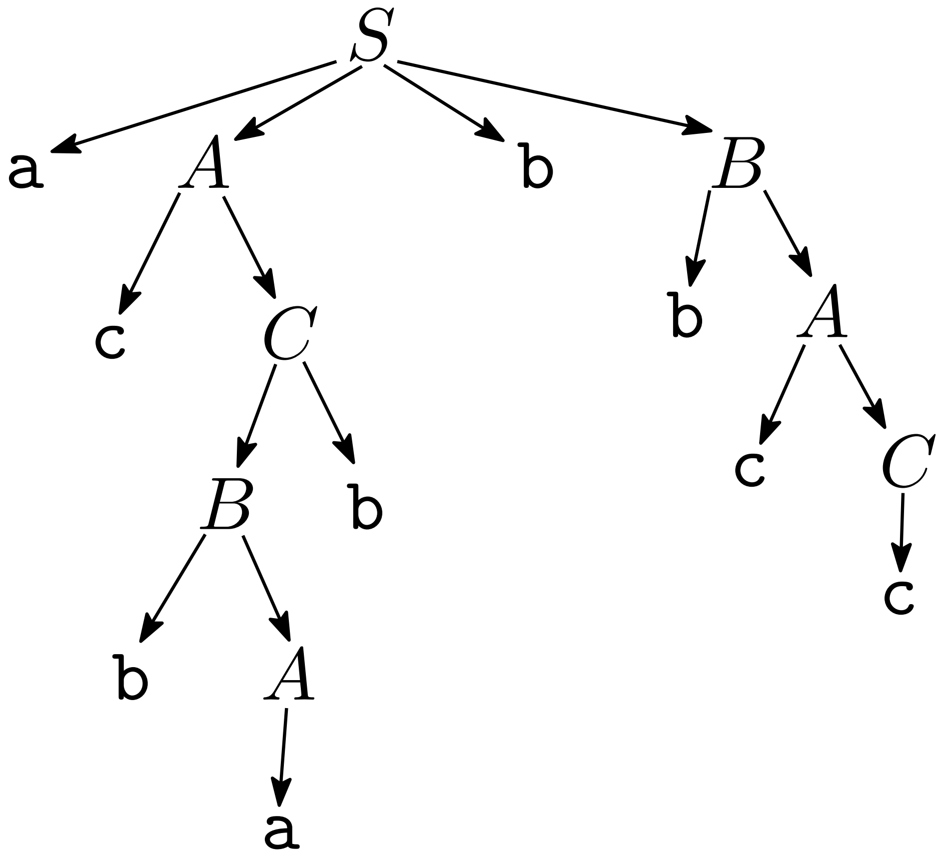
$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$

$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$



$\mathtt{a\ c\ c\ b}\,\boxed{\mathtt{b\ c\ b\ a\ a}} \in L(G)$

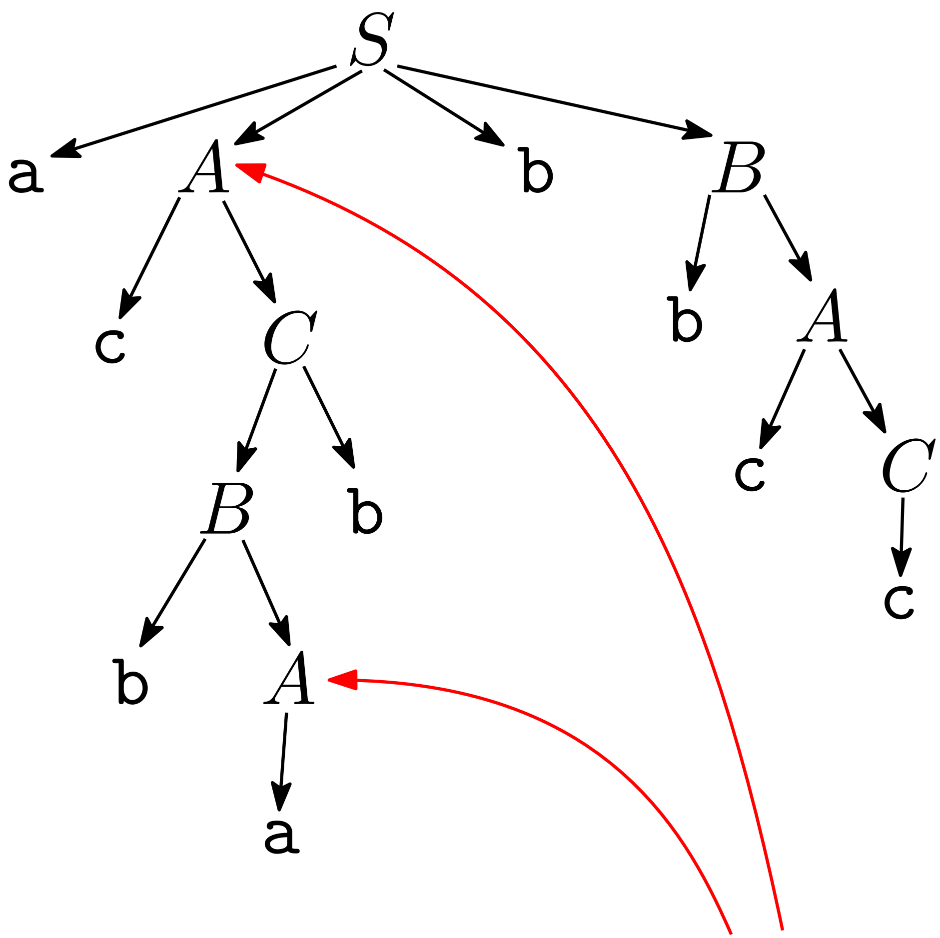
Pumpen – Intuition



$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B, \\ A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a}, \\ B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b}, \\ C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$\mathtt{a\ c\ b\ a\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$

Pumpen – Intuition

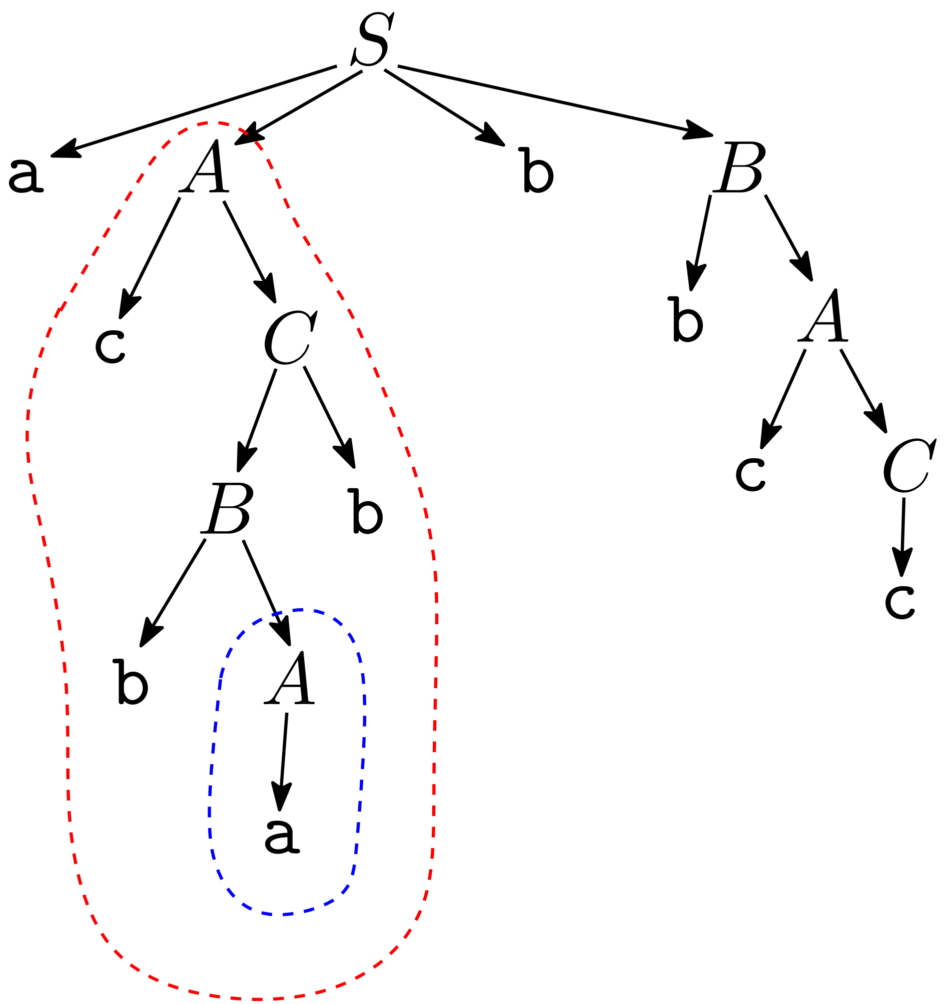


$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,\\
A &\to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},\\
B &\to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},\\
C &\to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}
\end{aligned}
$$

$$\mathtt{a\;c\;b\;a\;b\;b\;b\;c\;c} \in L(G)$$

Zwei Vorkommen des gleichen Nichtterminals A auf dem gleichen (Wurzel-Blatt) Pfad.

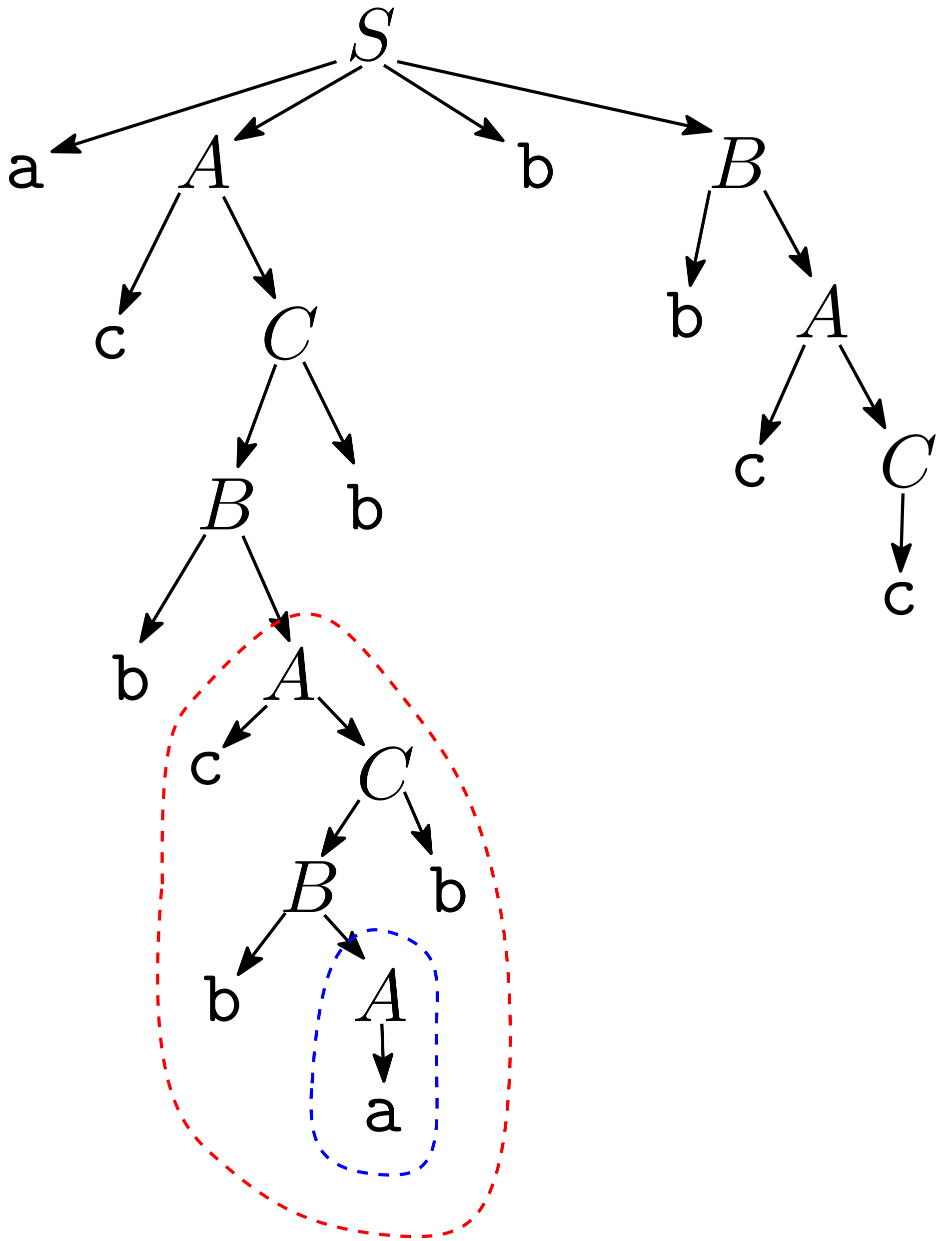
Pumpen – Intuition



$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$$
$$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$$
$$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$$
$$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$\mathtt{a\,c\,b\,a\,b\,b\,b\,c\,c} \in L(G)$

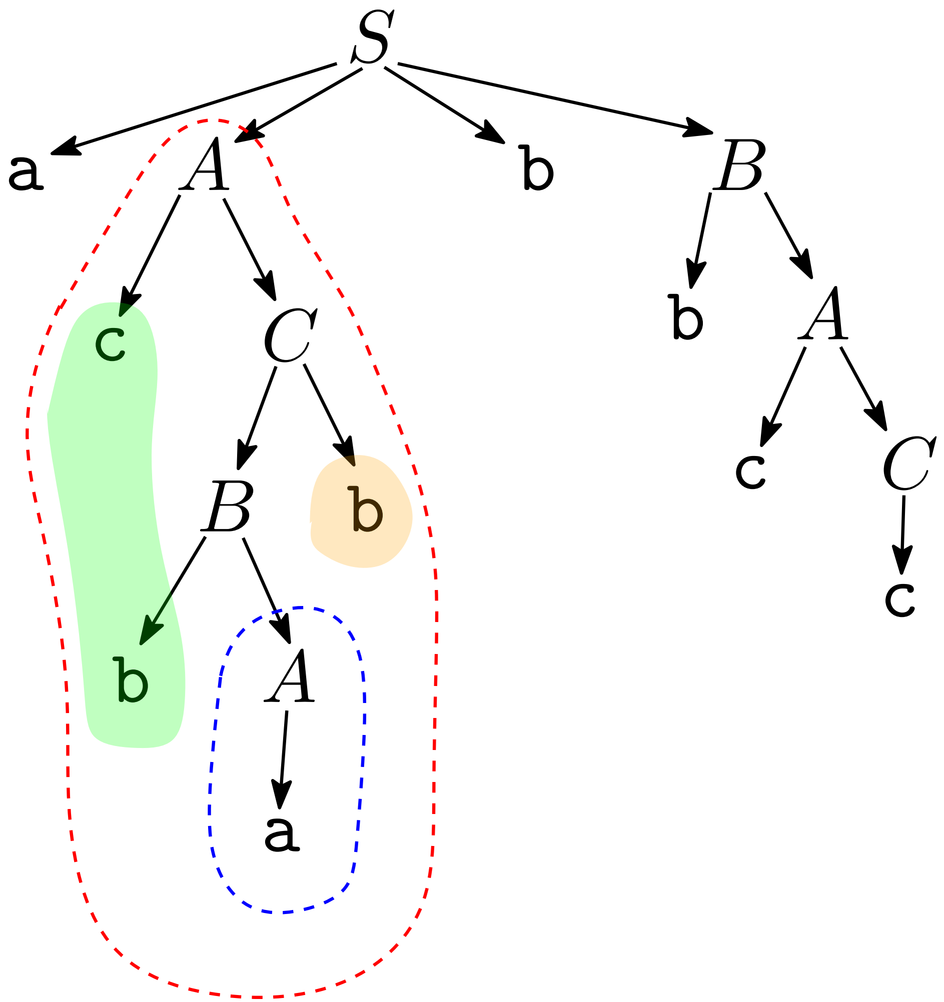
Pumpen – Intuition



$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,\quad A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},\quad B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},\quad C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$\mathtt{a\ c\ b\ c\ b\ a\ b\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$

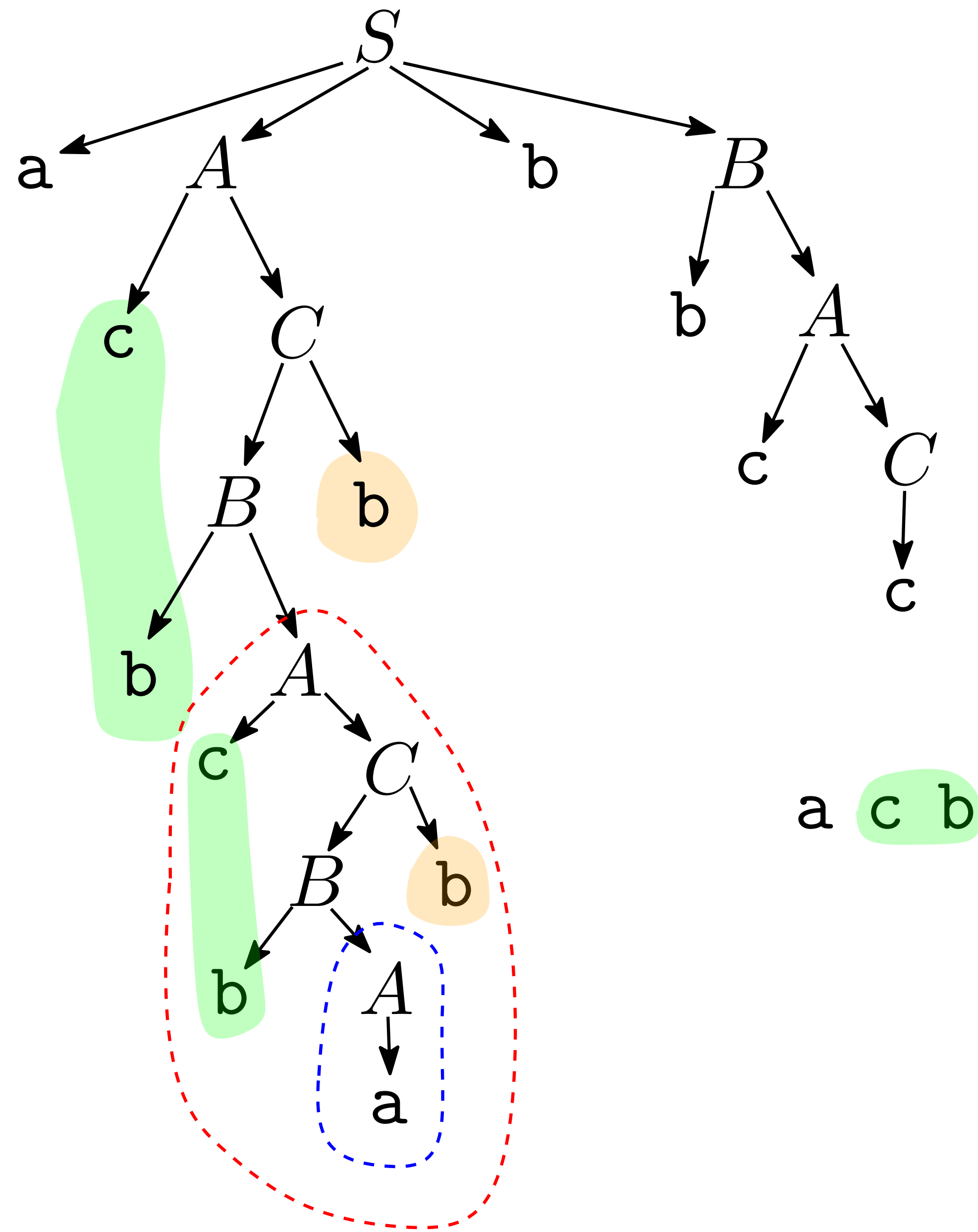
Pumpen – Intuition



$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B, \\
& A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a}, \\
& B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b}, \\
& C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}
\end{aligned}
$$

$$\mathtt{a}\ \underbrace{\mathtt{c}\ \mathtt{b}\ \underbrace{\mathtt{a}}\ \mathtt{b}}\ \mathtt{b}\ \mathtt{b}\ \mathtt{c}\ \mathtt{c} \in L(G)$$

Pumpen – Intuition

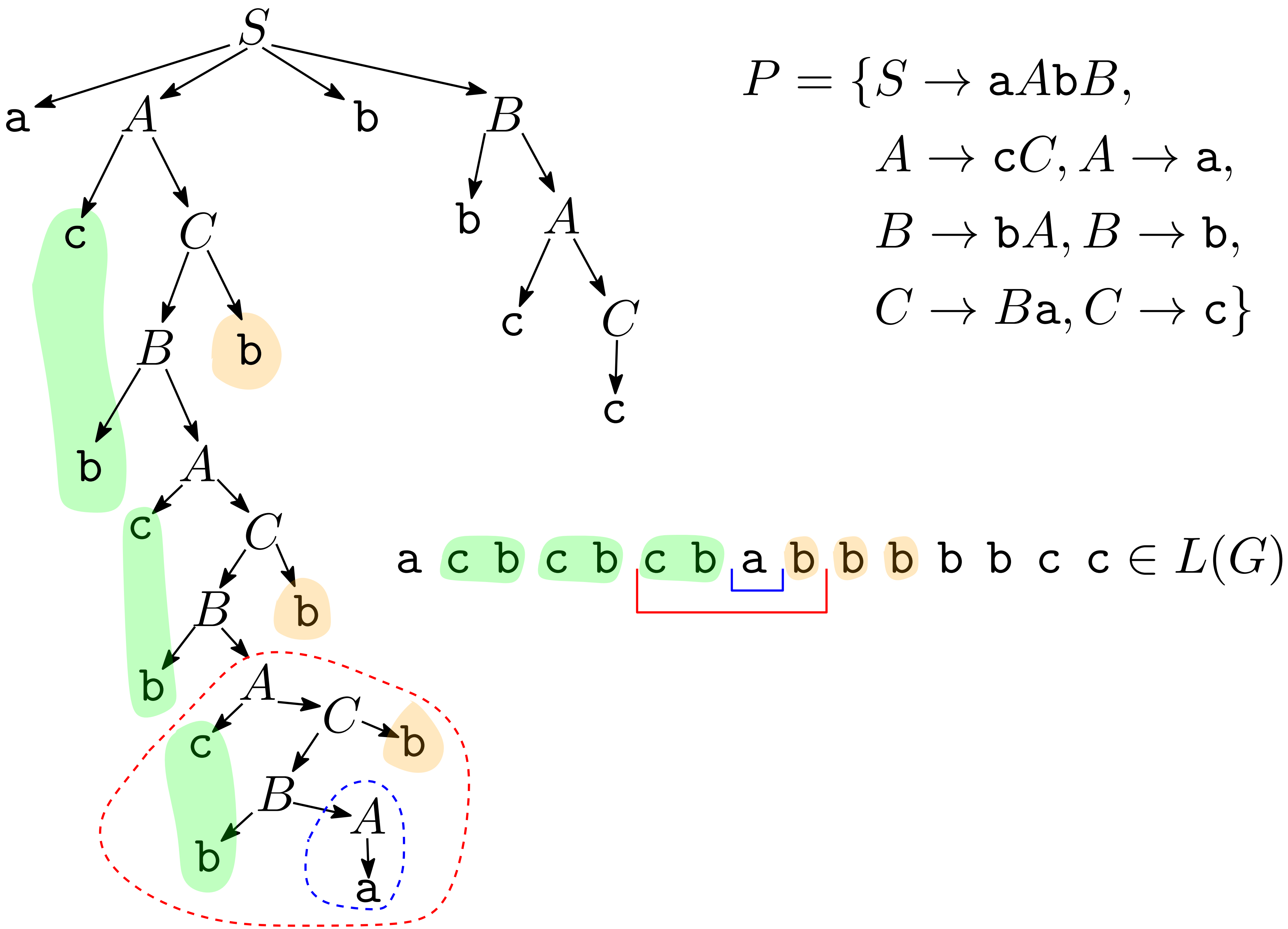


$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B, \\
& A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a}, \\
& B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b}, \\
& C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}
\end{aligned}
$$

$$\mathtt{a\ c\ b\ }\underbrace{\mathtt{c\ b\ }\underbrace{\mathtt{a}}\mathtt{\ b}}\mathtt{\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$$

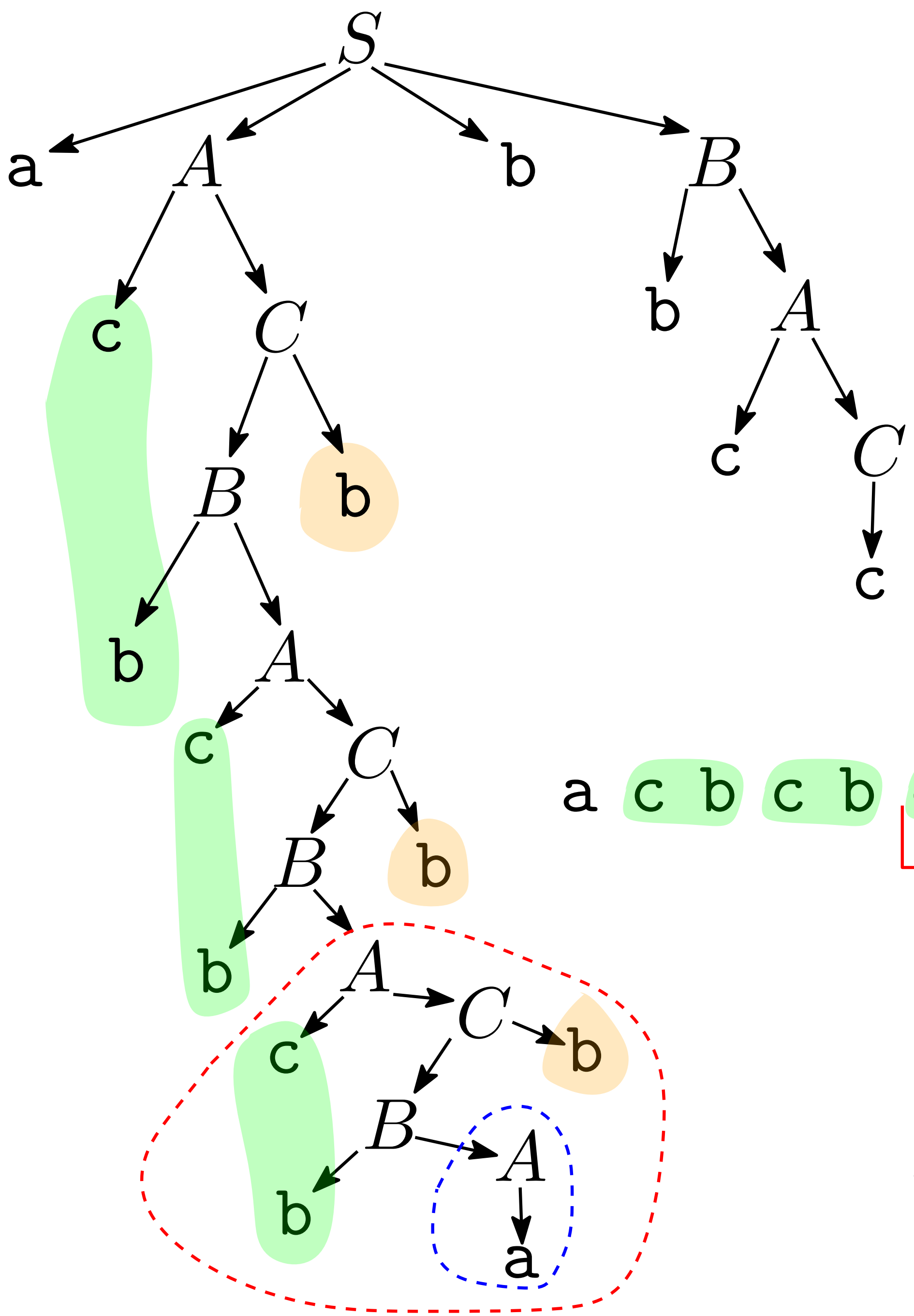
Pumpen – Intuition

$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B, \\
& A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a}, \\
& B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b}, \\
& C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c} \}
\end{aligned}
$$



$\mathtt{a\ c\ b\ c\ b\ c\ b\ a\ b\ b\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$

Pumpen – Intuition

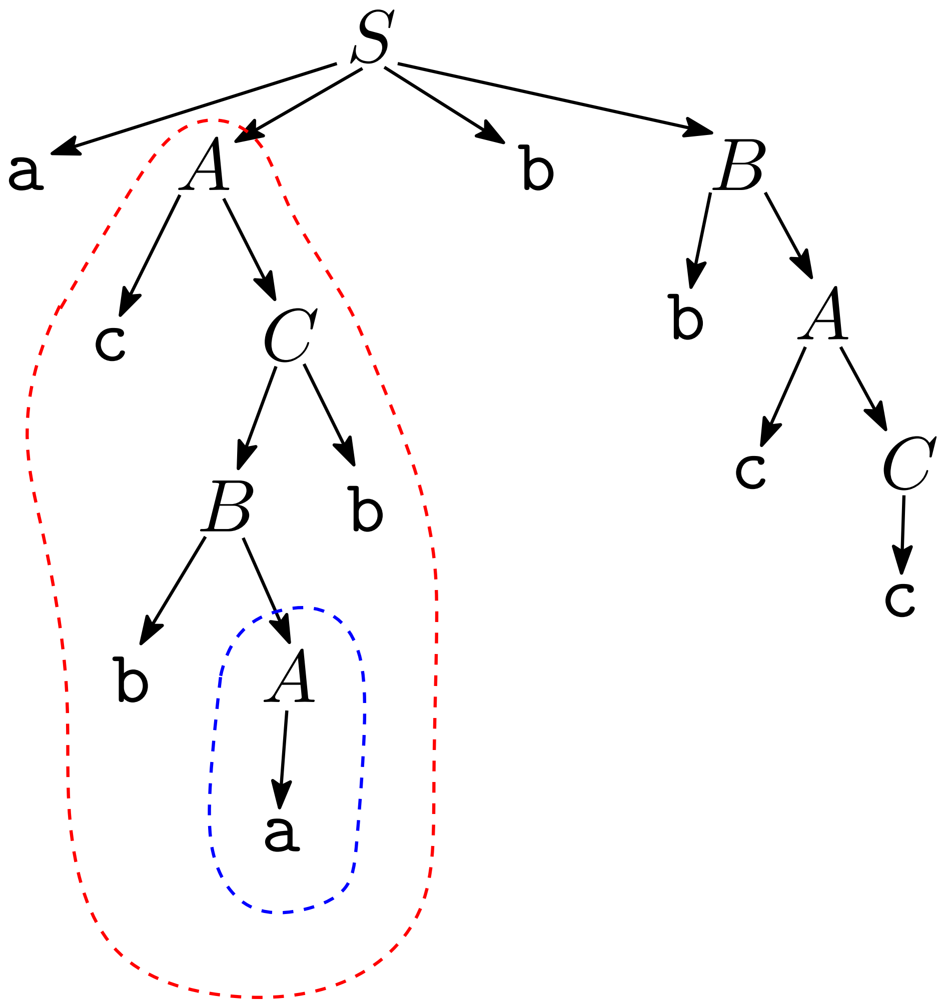


$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$$
$$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$$
$$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$$
$$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$$\mathtt{a\ c\ b\ c\ b\ }\underbrace{\mathtt{c\ b\ }\underbrace{\mathtt{a}}_{}\mathtt{\ b}}_{}\mathtt{\ b\ b\ b\ b\ c\ c} \in L(G)$$

Für alle $k \geq 0$:
$\mathtt{a}(\mathtt{cb})^k\mathtt{a}(\mathtt{b})^k\mathtt{bbcc} \in L(G)$

Pumpen – Intuition

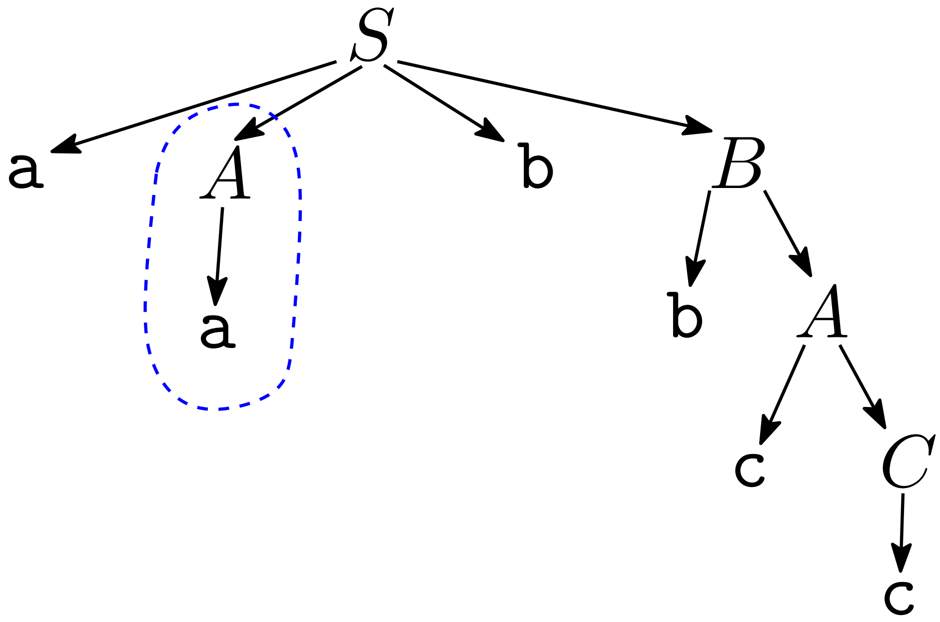


$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$$
$$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$$
$$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$$
$$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$$\mathtt{a}\ \underbrace{\mathtt{c}\ \mathtt{b}\ \underbrace{\mathtt{a}}\ \mathtt{b}}\ \mathtt{b}\ \mathtt{b}\ \mathtt{c}\ \mathtt{c} \in L(G)$$

Für alle $k \geq 0$:
$\mathtt{a}(\mathtt{cb})^k\mathtt{a}(\mathtt{b})^k\mathtt{bbcc} \in L(G)$

Pumpen – Intuition



$$P = \{S \to \mathtt{a}A\mathtt{b}B,$$
$$A \to \mathtt{c}C, A \to \mathtt{a},$$
$$B \to \mathtt{b}A, B \to \mathtt{b},$$
$$C \to B\mathtt{a}, C \to \mathtt{c}\}$$

$$\mathtt{a}\ \underbrace{\mathtt{a}}\ \mathtt{b}\ \mathtt{b}\ \mathtt{c}\ \mathtt{c} \in L(G)$$

Für alle $k \geq 0$:
$\mathtt{a}(\mathtt{cb})^k\mathtt{a}(\mathtt{b})^k\mathtt{bbcc} \in L(G)$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^k wx^k y \in L$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in \mathsf{CFL}$. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^k wx^k y \in L$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Notwendige Beobachtung für den Beweis:

Lemma 1:
Hat ein Ableitungsbaum in Chomsky Normalform die Höhe d, so kann das abgeleitete Wort maximal die Länge 2^{d-1} haben.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei T ein Ableitungsbaum für z.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei T ein Ableitungsbaum für z.

Betrachte einen längsten Wurzel-Blatt Pfad P in T.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^k wx^k y \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei T ein Ableitungsbaum für z.

Betrachte einen längsten Wurzel-Blatt Pfad P in T.
Wegen Lemma 1: Dieser Pfad hat Länge mindestens $m + 1$.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

Sei $L \in$ CFL. Dann gibt es ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis:

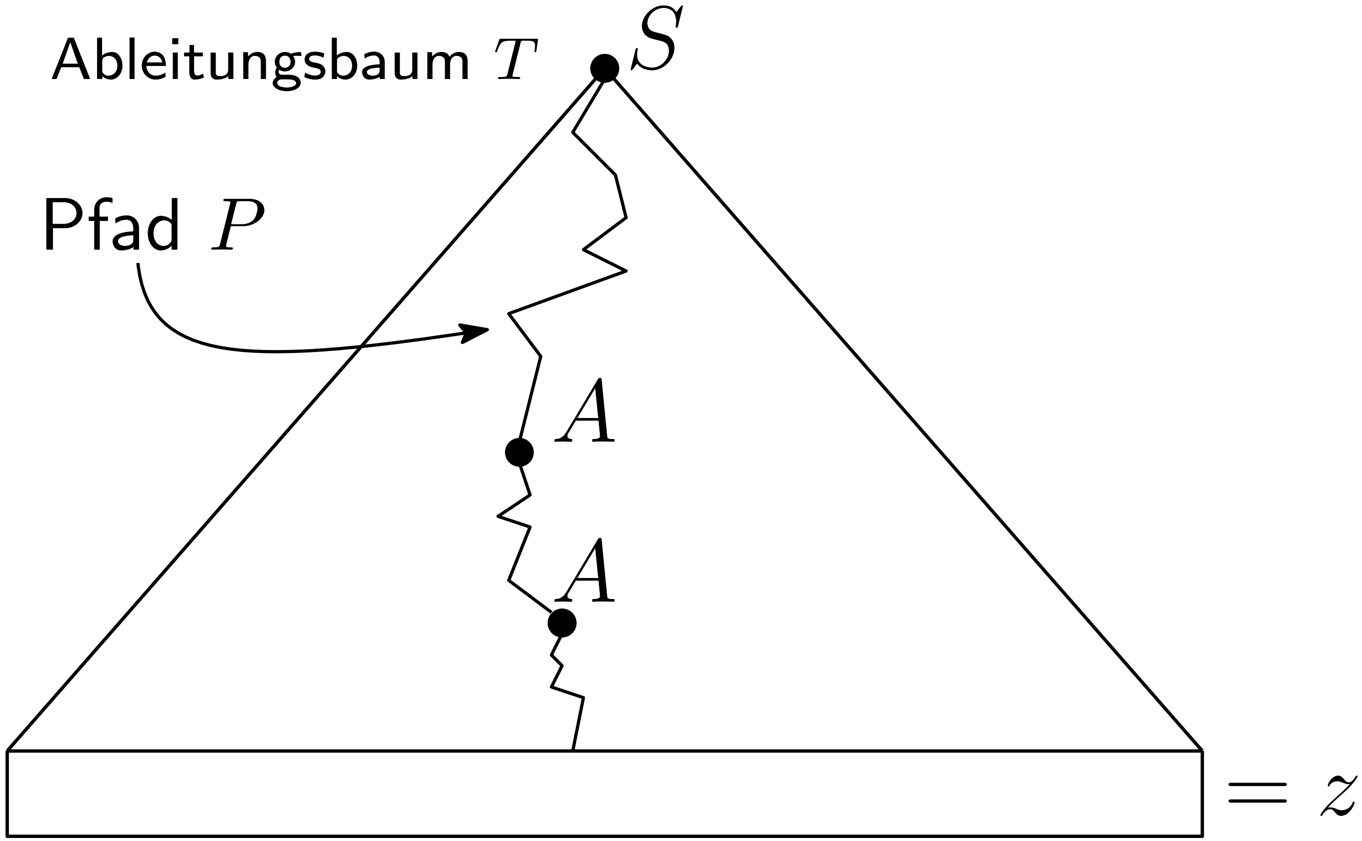
Sei G eine kontextfreie Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky Normalform mit m vielen Nichtterminalen.

Wir definieren $n := 2^m$.

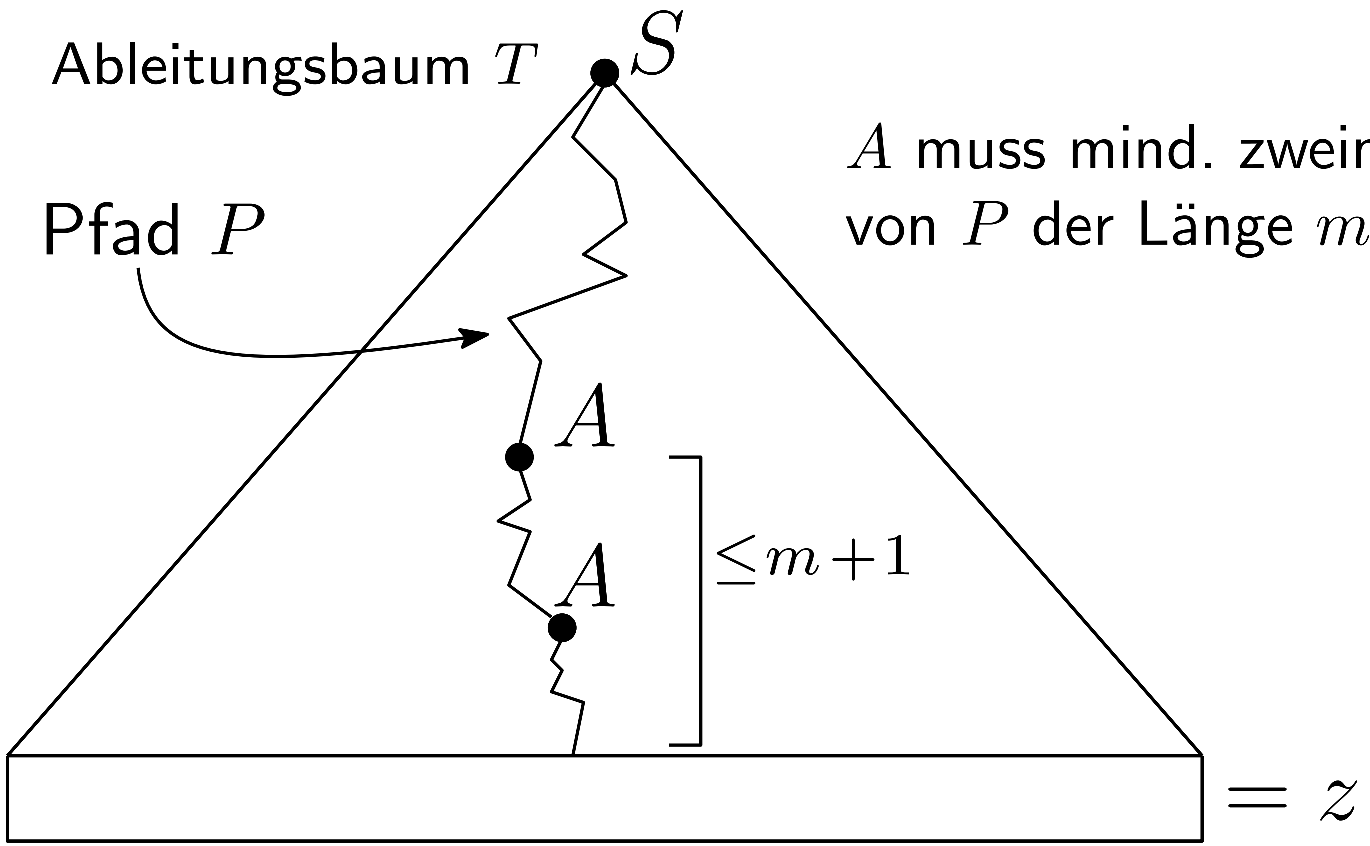
Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei T ein Ableitungsbaum für z.

Betrachte einen längsten Wurzel-Blatt Pfad P in T.
Wegen Lemma 1: Dieser Pfad hat Länge mindestens $m + 1$.
Es gibt ein Nichtterminal A, dass in P mindestens zweimal vorkommt.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

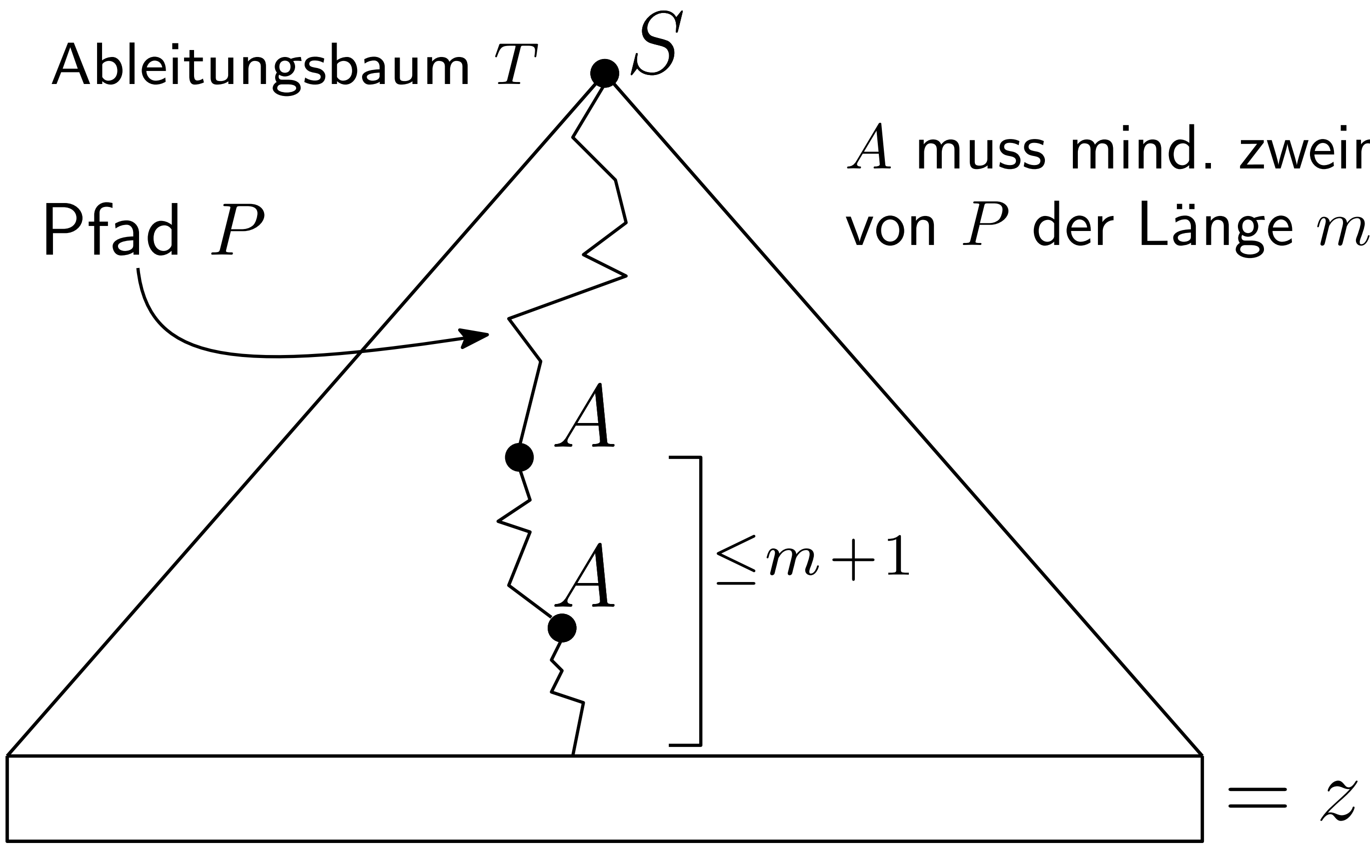


Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



A muss mind. zweimal auf dem Endstück von P der Länge $m+1$ vorkommen.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



A muss mind. zweimal auf dem Endstück von P der Länge $m+1$ vorkommen.

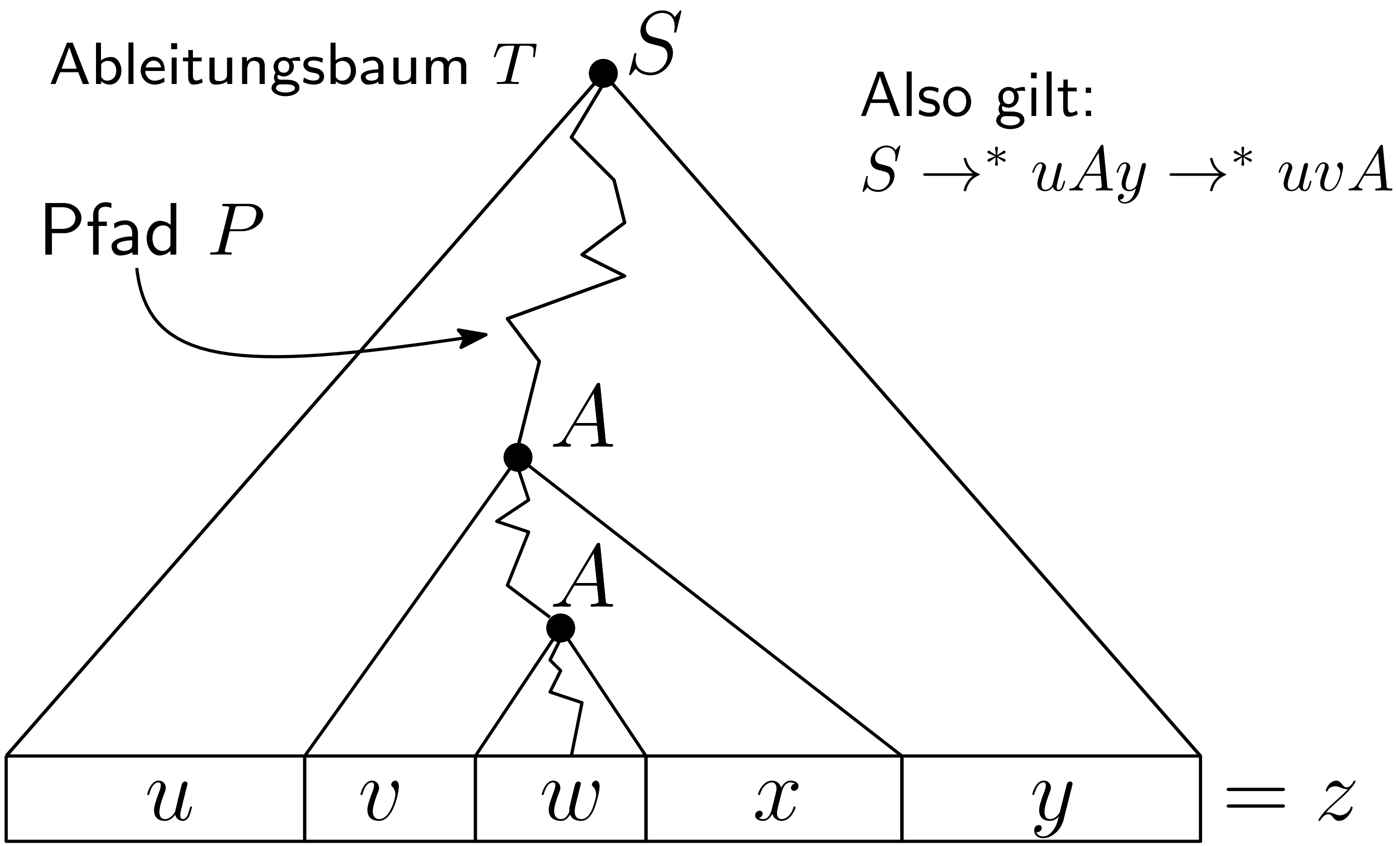
Zu zeigen: $z = uvwxy$ sodass

(1) $|vx| \geq 1$

(2) $|vwx| \leq n$

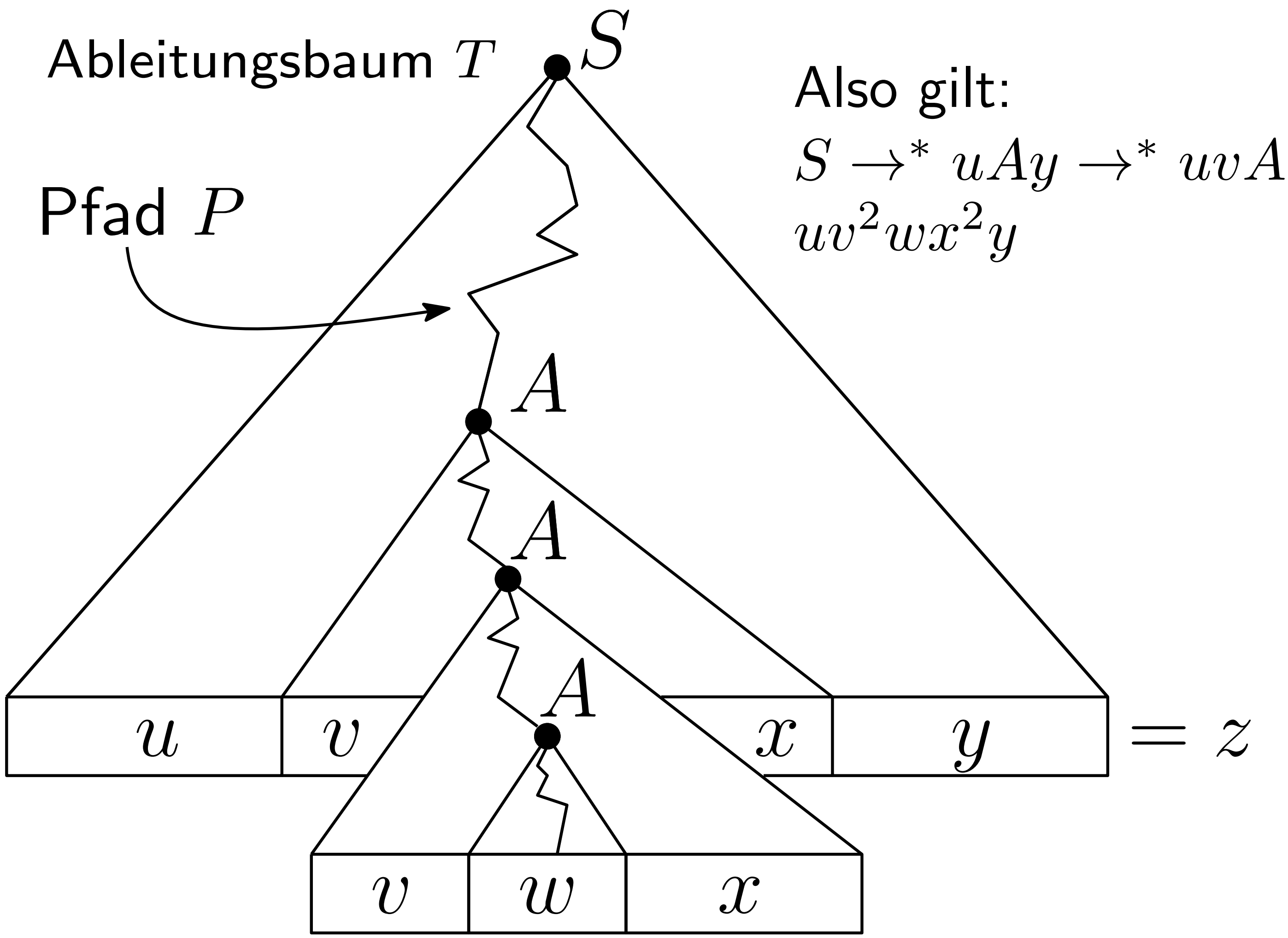
(3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



Also gilt:
$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvwxy$

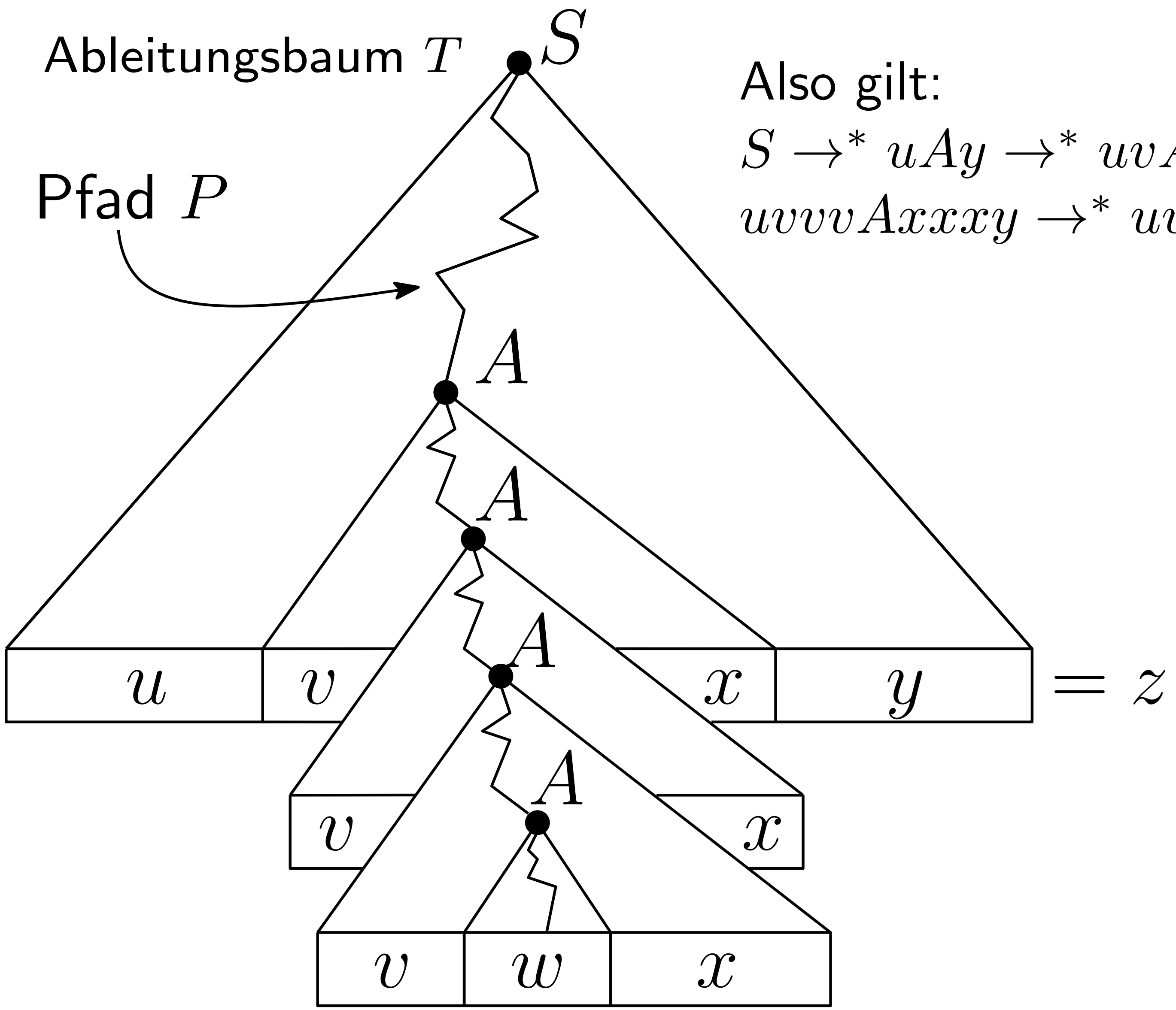
Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



Also gilt:

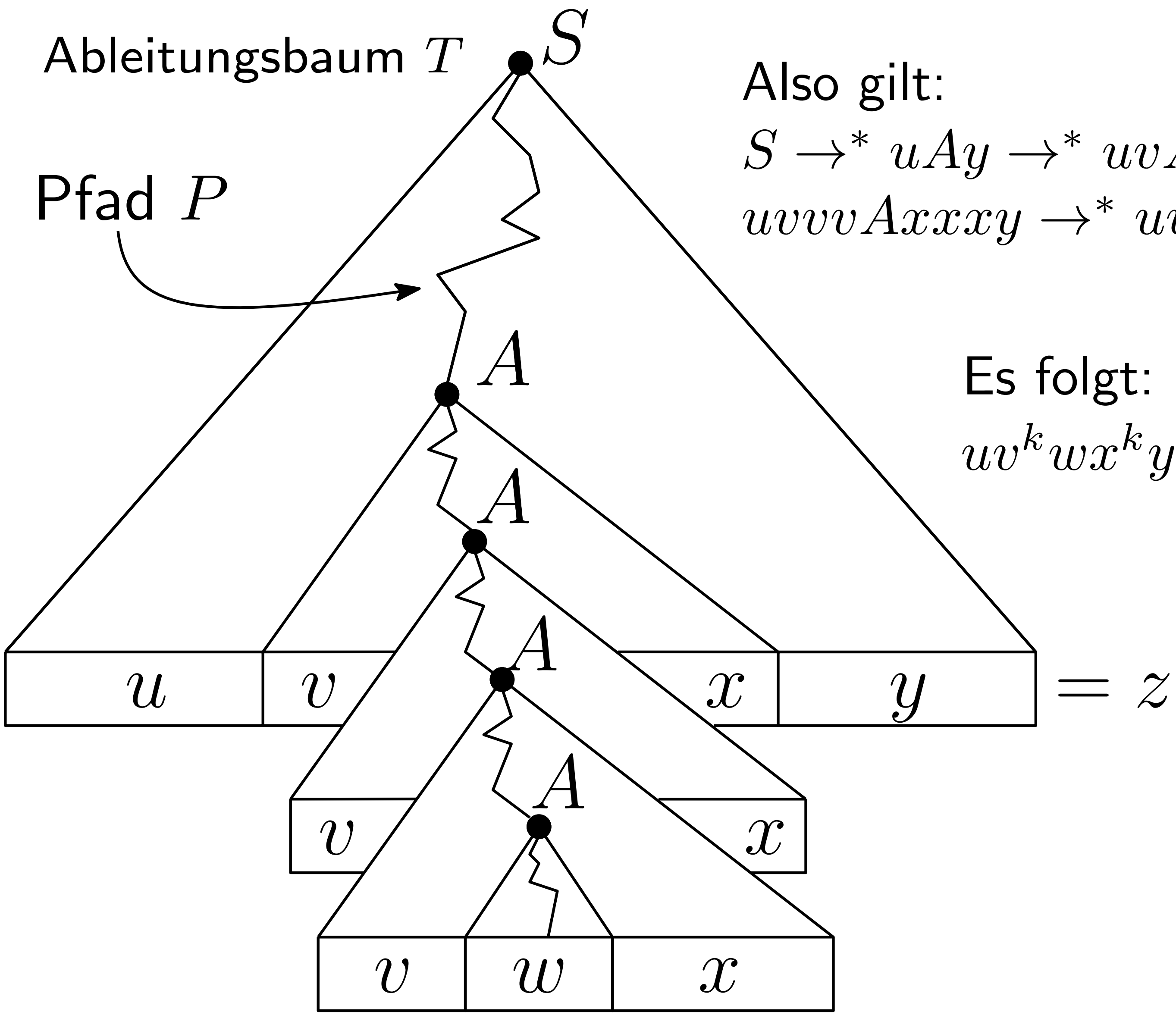
$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvvAxxy \to^* uv^2wx^2y$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



Also gilt:
$S \rightarrow^* uAy \rightarrow^* uvAxy \rightarrow^* uvvAxxy \rightarrow^* uvvvAxxxy \rightarrow^* uv^3wx^3y$

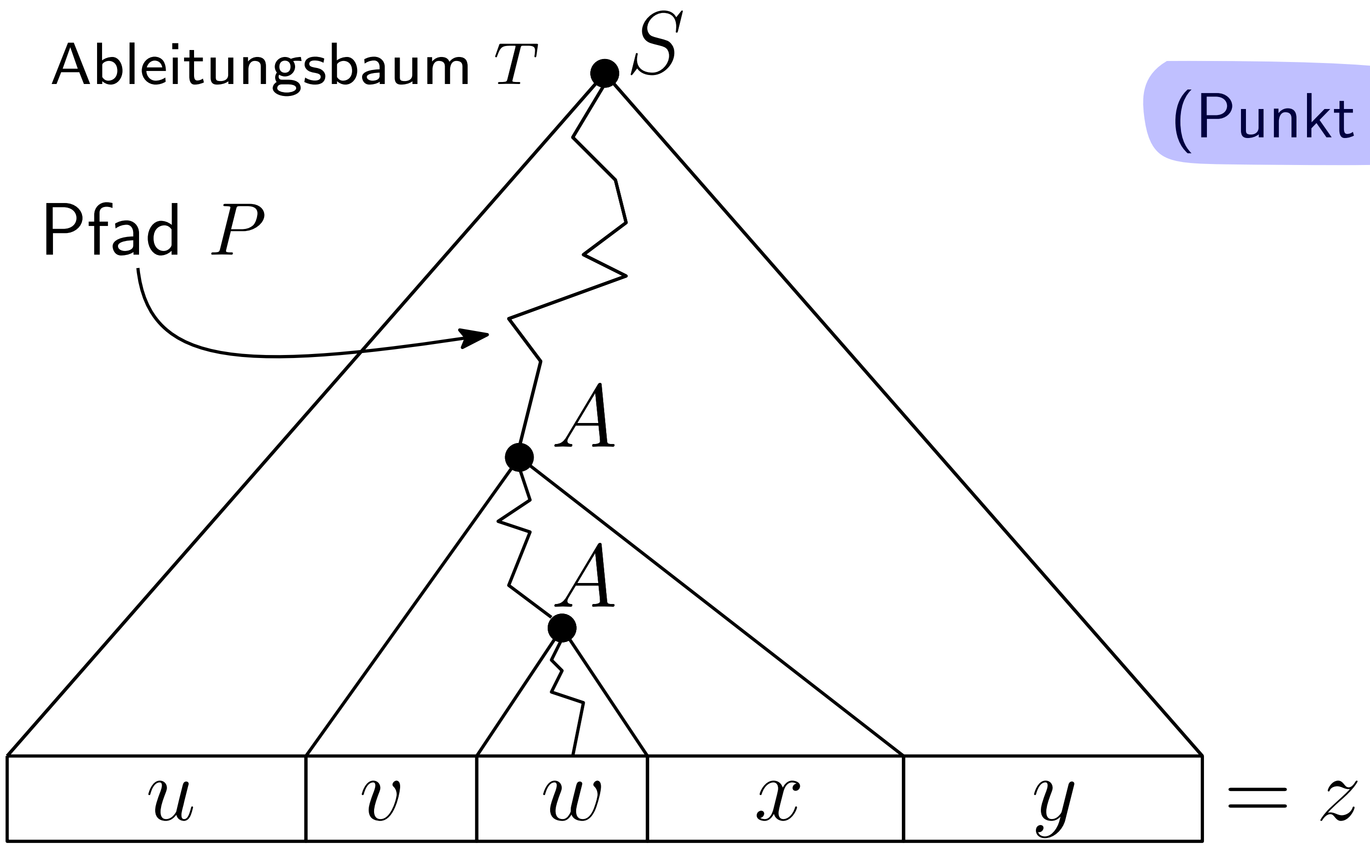
Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



Also gilt:
$S \to^* uAy \to^* uvAxy \to^* uvvAxxy \to^*$
$uvvvAxxxy \to^* uv^3wx^3y$

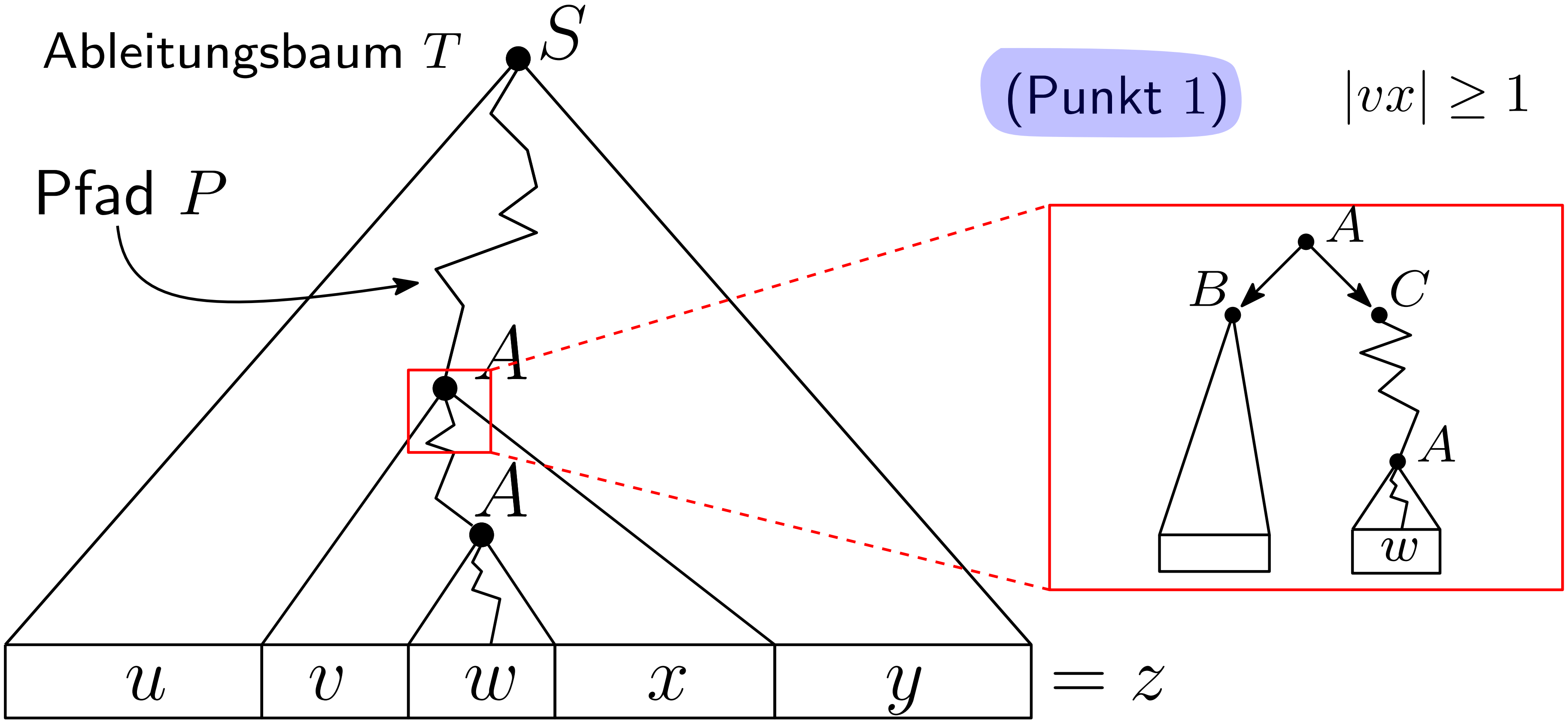
Es folgt: (Punkt 3)
$uv^kwx^ky \in L$ für alle $k \geq 0$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



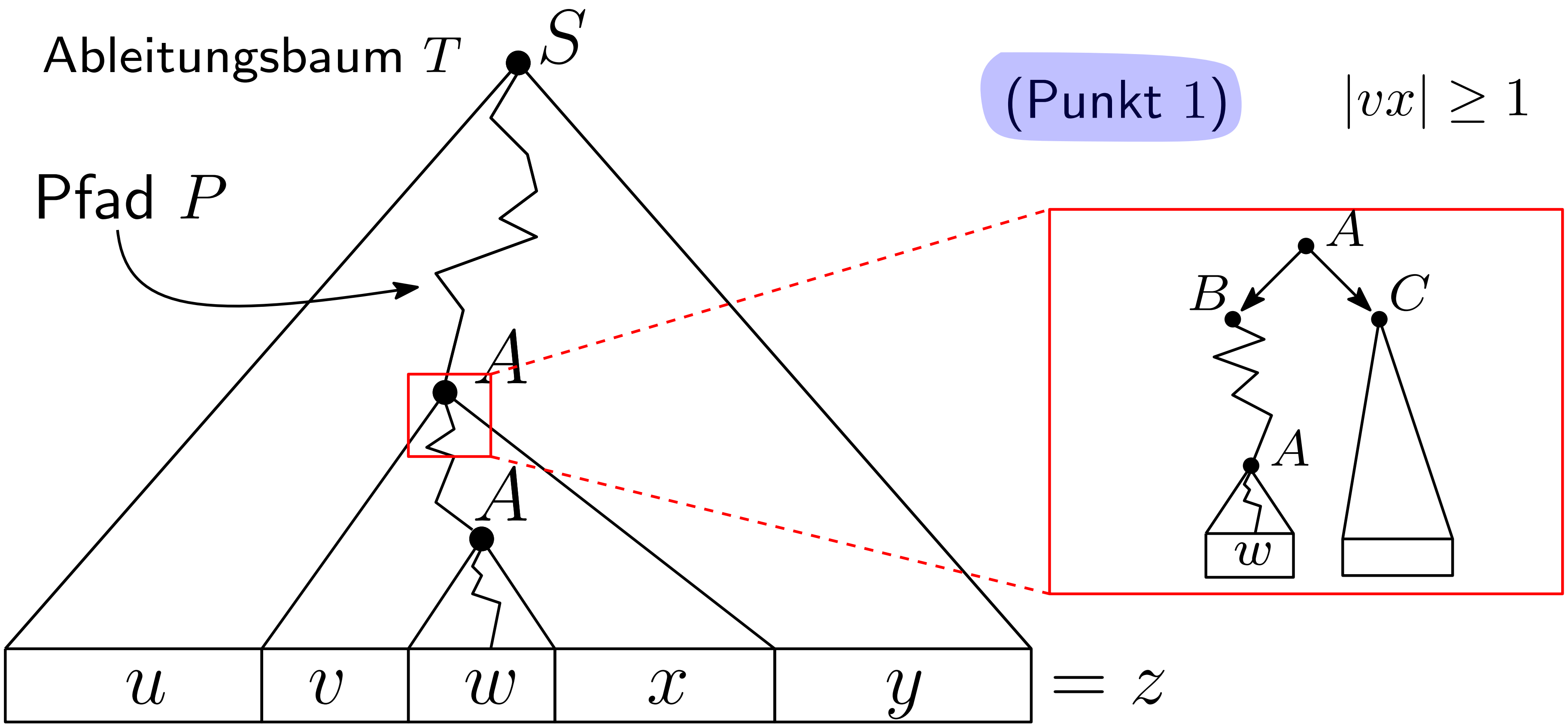
(Punkt 1) $|vx| \geq 1$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

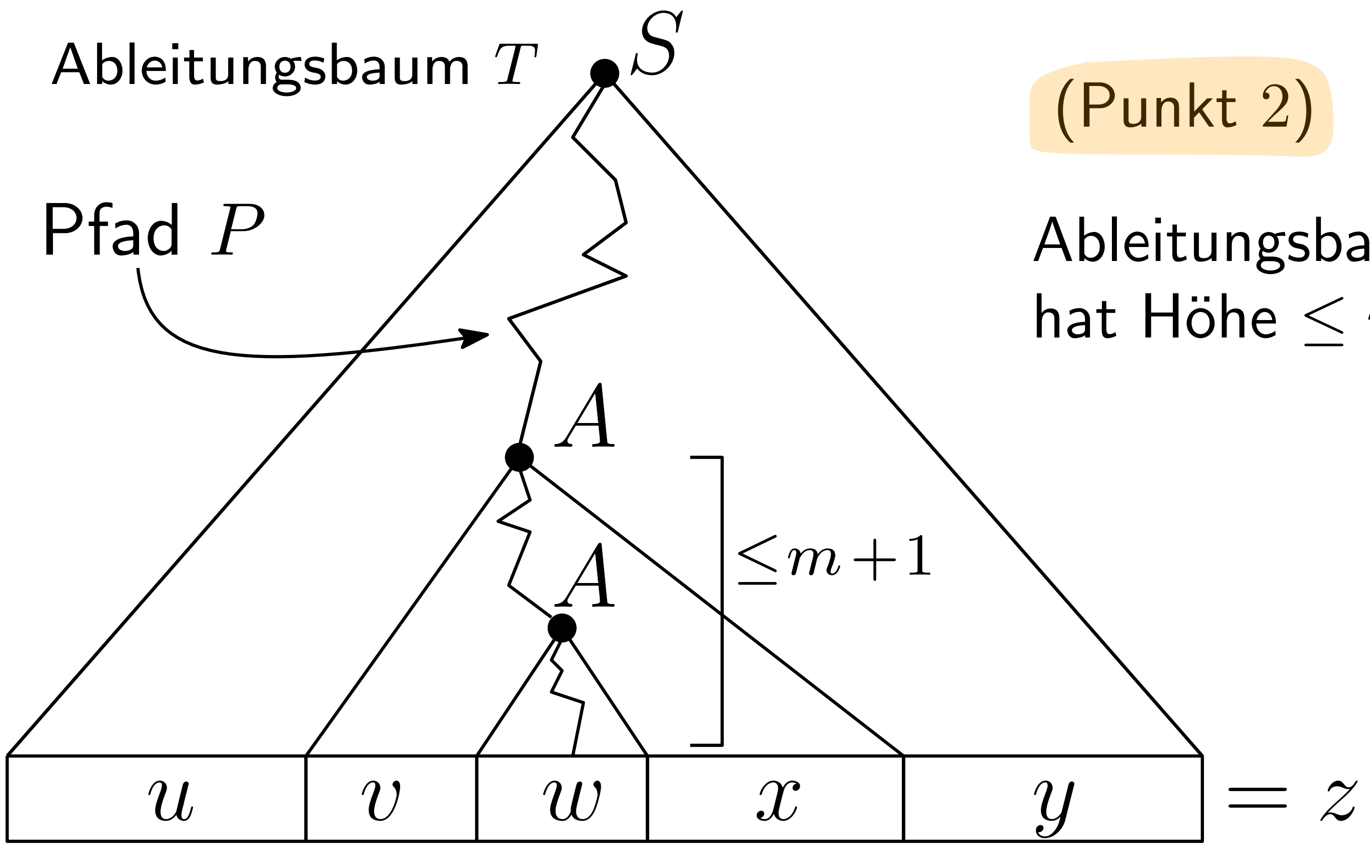


Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen

(Punkt 1) $|vx| \geq 1$



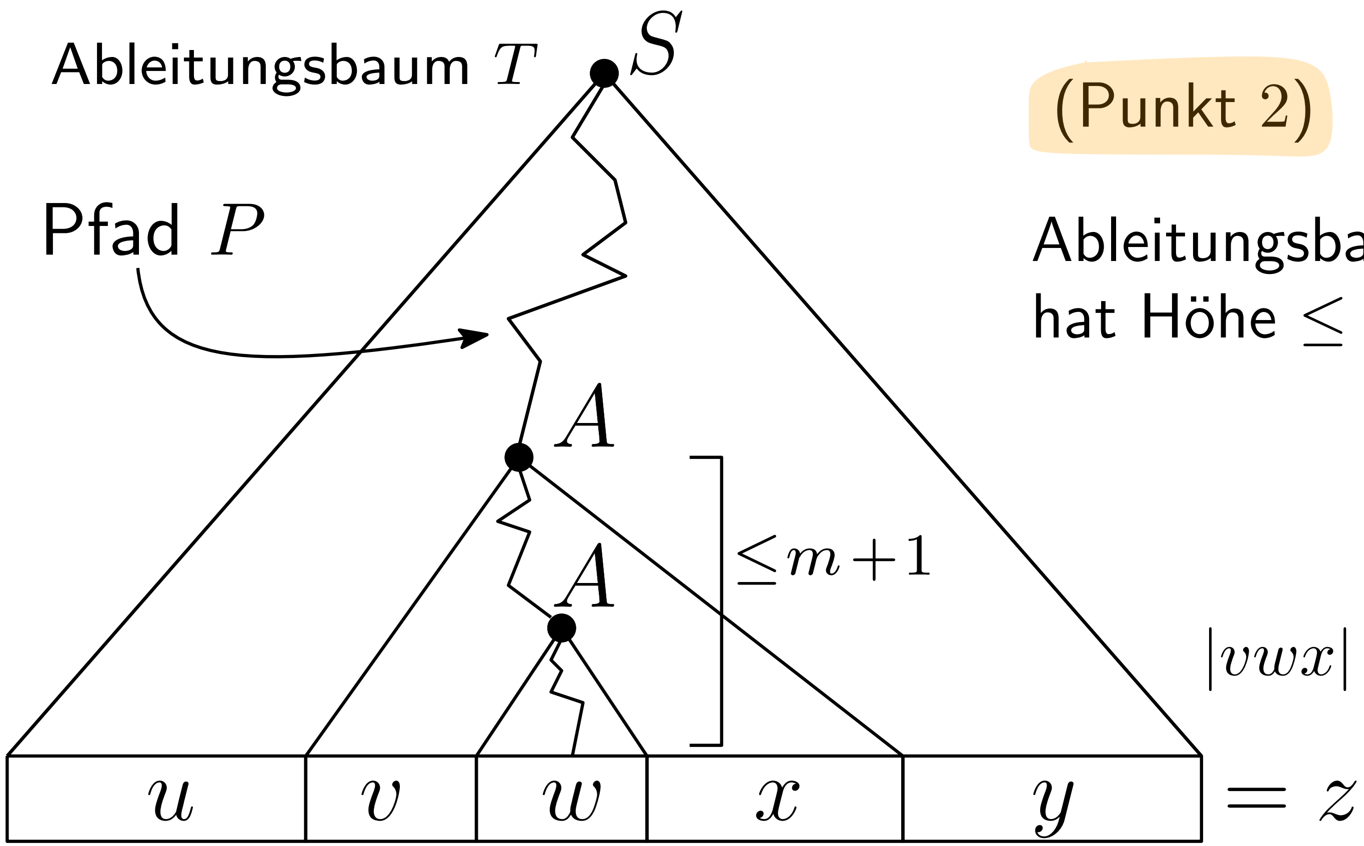
Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



(Punkt 2) $|vwx| \leq n$

Ableitungsbaum für $A \rightarrow^* vwx$ hat Höhe $\leq m + 1$.

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



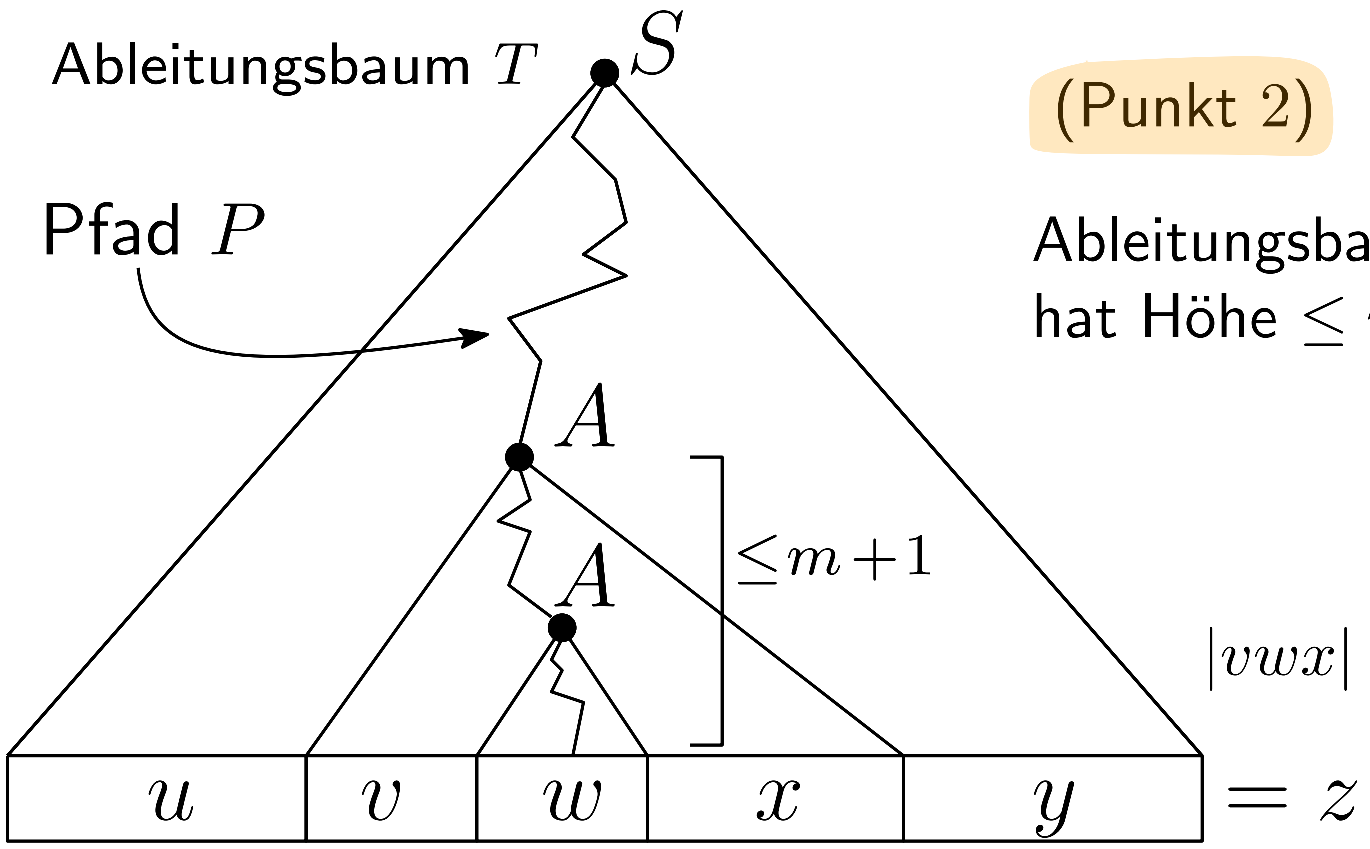
(Punkt 2) $|vwx| \leq n$

Ableitungsbaum für $A \rightarrow^* vwx$ hat Höhe $\leq m+1$.

$$\Big\downarrow \text{ Lemma 1}$$

$$|vwx| \leq 2^{(m+1)-1} = 2^m = n$$

Das Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen



(Punkt 2) $|vwx| \leq n$

Ableitungsbaum für $A \rightarrow^* vwx$ hat Höhe $\leq m+1$.

Lemma 1

$$|vwx| \leq 2^{(m+1)-1} = 2^m = n$$

□

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Hauptanwendung des Pumping Lemmas:
Zeigen, dass eine Sprache **nicht** kontextfrei ist.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Hauptanwendung des Pumping Lemmas:
Zeigen, dass eine Sprache **nicht** kontextfrei ist.

Sei Σ ein endliches Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$.
Ist die Sprache $L_1 = \{w\, w^R \mid w \in \Sigma^+\}$ kontextfrei?

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Hauptanwendung des Pumping Lemmas:
Zeigen, dass eine Sprache **nicht** kontextfrei ist.

Sei Σ ein endliches Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$.
Ist die Sprache $L_1 = \{w\, w^R \mid w \in \Sigma^+\}$ kontextfrei?

Ja! Denn $L_1 = L(G)$ mit
$G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$,
$P = \{S \to xSx, S \to xx \mid x \in \Sigma\}$

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Hauptanwendung des Pumping Lemmas:
Zeigen, dass eine Sprache **nicht** kontextfrei ist.

Sei Σ ein endliches Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$.
Ist die Sprache $L_1 = \{w\, w^R \mid w \in \Sigma^+\}$ kontextfrei?

Ja! Denn $L_1 = L(G)$ mit
$G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$,
$P = \{S \to xSx, S \to xx \mid x \in \Sigma\}$

Ist die Sprache $L_2 = \{w\, w \mid w \in \Sigma^+\}$ kontextfrei?

Nein! Beweis durch Pumping Lemma.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Da $|\Sigma| \geq 2$ gibt es $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ mit $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\, w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Da $|\Sigma| \geq 2$ gibt es $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ mit $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$.

Betrachte das Wort $z = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Da $|\Sigma| \geq 2$ gibt es $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ mit $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$.

Betrachte das Wort $z = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$. Offensichtlich: $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Da $|\Sigma| \geq 2$ gibt es $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ mit $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$.

Betrachte das Wort $z = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$. Offensichtlich: $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.

Sei $z = uvwxy$ die Zerlegung die (1), (2) und (3) erfüllt.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

Wir führen die Annahme, dass L_2 kontextfrei ist zu einem Widerspruch.

Das Pumping Lemma besagt: Es gibt ein $n \geq 1$, sodass jedes $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ in $z = uvwxy$ zerlegt werden kann mit

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Da $|\Sigma| \geq 2$ gibt es $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$ mit $\mathtt{a} \neq \mathtt{b}$.

Betrachte das Wort $z = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$. Offensichtlich: $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.

Sei $z = uvwxy$ die Zerlegung die (1), (2) und (3) erfüllt.

Wir werden zeigen, dass falls (1) und (2), so gilt
$uv^0wx^0y = uwy \notin L$,
was ein Widerspruch zu (3) darstellt.

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?

$$z = \boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}\boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}$$

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?

$$z = \boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}\boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}$$

Wegen (2):
Der vwx Teil kann nicht beide $\texttt{a}$-Blöcke oder beide $\texttt{b}$-Blöcke "berühren".

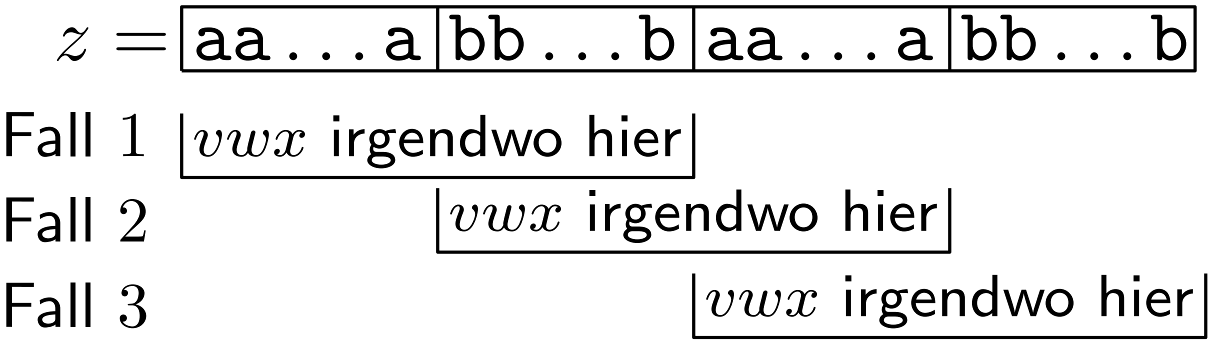
Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\, w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?



$z = \boxed{\texttt{aa...a}}\boxed{\texttt{bb...b}}\boxed{\texttt{aa...a}}\boxed{\texttt{bb...b}}$

Fall 1 vwx irgendwo hier

Fall 2 vwx irgendwo hier

Fall 3 vwx irgendwo hier

Wegen (2):
Der vwx Teil kann nicht beide a-Blöcke oder beide b-Blöcke "berühren".

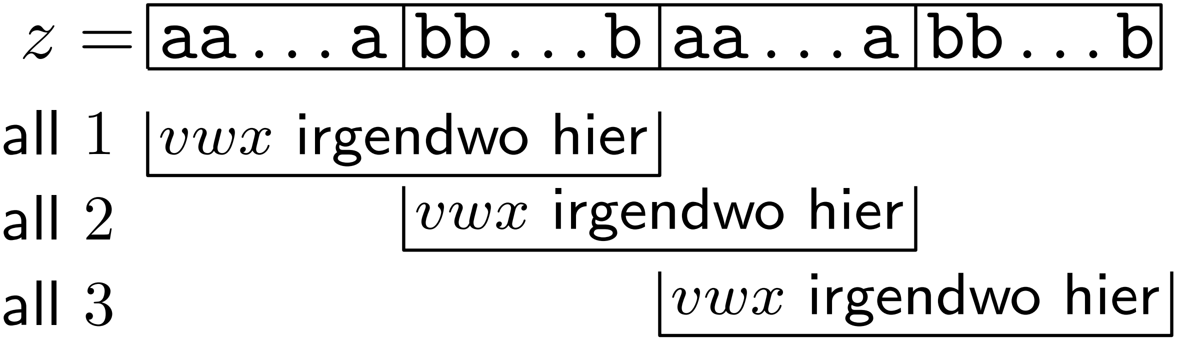
Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?



$z = \boxed{\texttt{aa...a}}\boxed{\texttt{bb...b}}\boxed{\texttt{aa...a}}\boxed{\texttt{bb...b}}$

Fall 1 vwx irgendwo hier $uwy = \texttt{a}^k\texttt{b}^\ell\texttt{a}^n\texttt{b}^n$

Fall 2 vwx irgendwo hier $uwy = \texttt{a}^n\texttt{b}^k\texttt{a}^\ell\texttt{b}^n$

Fall 3 vwx irgendwo hier $uwy = \texttt{a}^n\texttt{b}^n\texttt{a}^k\texttt{b}^\ell$

mit $1 \leq k, \ell \leq n$

Wegen (2):
Der vwx Teil kann nicht beide a-Blöcke oder beide b-Blöcke "berühren".

Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\, w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^k wx^k y \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?

$$z = \boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}\boxed{\texttt{aa}\ldots\texttt{a}}\boxed{\texttt{bb}\ldots\texttt{b}}$$

Fall 1 $\boxed{vwx \text{ irgendwo hier}}$ $uwy = \texttt{a}^k\texttt{b}^\ell\texttt{a}^n\texttt{b}^n$

Fall 2 $\boxed{vwx \text{ irgendwo hier}}$ $uwy = \texttt{a}^n\texttt{b}^k\texttt{a}^\ell\texttt{b}^n$

Fall 3 $\boxed{vwx \text{ irgendwo hier}}$ $uwy = \texttt{a}^n\texttt{b}^n\texttt{a}^k\texttt{b}^\ell$

mit $1 \leq k, \ell \leq n$

Wegen (2):
Der vwx Teil kann nicht beide a-Blöcke oder beide b-Blöcke "berühren".

Wegen (1):
$k < n$ oder $\ell < n$

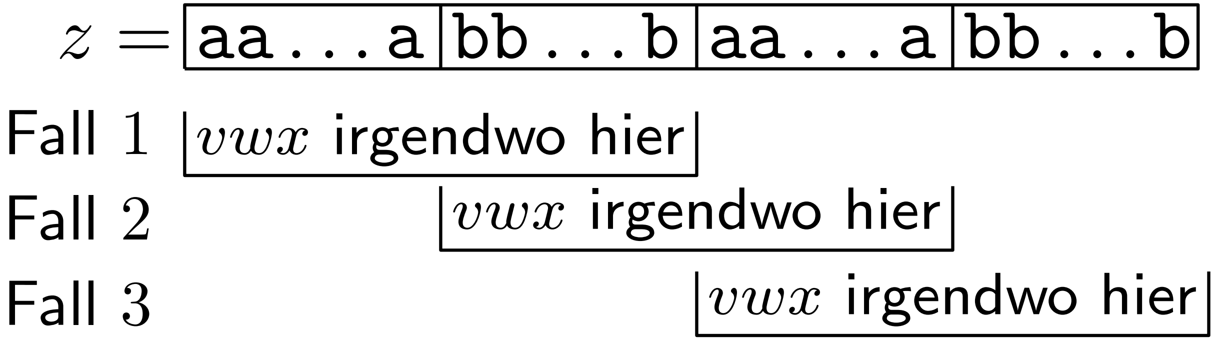
Anwendung des Pumping Lemmas für CFL

Theorem: Die Sprache $L_2 = \{w\,w \mid w \in \Sigma^+\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis:

(1) $|vx| \geq 1$ (2) $|vwx| \leq n$ (3) $uv^kwx^ky \in L_2$ für alle $k \geq 0$

Auch welche Arten kann $uvwxy$ das Wort z zerteilen?



$z = \boxed{\mathtt{aa\ldots a}}\boxed{\mathtt{bb\ldots b}}\boxed{\mathtt{aa\ldots a}}\boxed{\mathtt{bb\ldots b}}$

Fall 1 vwx irgendwo hier $uwy = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^\ell\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \notin L_2$

Fall 2 vwx irgendwo hier $uwy = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^k\mathtt{a}^\ell\mathtt{b}^n \notin L_2$

Fall 3 vwx irgendwo hier $uwy = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^k\mathtt{b}^\ell \notin L_2$

mit $1 \leq k, \ell \leq n$

Wegen (2):
Der vwx Teil kann nicht beide a-Blöcke oder beide b-Blöcke "berühren".

Wegen (1):
$k < n$ oder $\ell < n$

□